Studiare le seguenti equazioni differenziali.

1.
$$y' = \frac{xy}{1+x^2} - 1 \quad , \quad y(0) = y_0$$

2.
$$y' = \frac{3y}{x} - \frac{24}{1+x^2} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

3.
$$y' = \frac{2y}{x} - \frac{2x^2 - 4x + 4}{x} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

4.
$$y' = \frac{xy}{1+x^2} - 2x \quad , \quad y(0) = y_0$$

5.
$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{1+2x} \quad , \quad y(1) = y_0 \qquad x > 0$$

6.
$$y' = 3y - \frac{e^{3x}}{x^2 - 1} \quad , \quad y(2) = y_0 \qquad x > 1$$

Soluzioni e grafici

1. La soluzione é:
$$y(x) = \sqrt{1+x^2}(c - \text{settsinh}(x))$$
dove $c = y_0$. Si ha:
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$
Alcuni grafici, per vari valori di c, sono in figura 1 (la curva rossa é $g(x) = x + 1/x$); in figura 2 c'é una visione ravvicinata in zero delle stesse curve.

2. La soluzione é:
$$y(x) = x^3 \left(c + \frac{12}{x^2} + 24 \ln \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right)$$
dove $c = y_0 - 12 + 12\ln(2)$. Si ha:
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0^+ \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ 0 & \text{se } c = 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$
Alcuni grafici (per vari valori di c) sono mostrati in figura 3; la curva rossa é $g(x) = \dfrac{8x}{1+x^2}$.

3. La soluzione é:
$$y(x) = x^2 \left(c + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x} - 2\ln(x) \right)$$
dove $c = y_0 + 2$. Si ha:
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 2^- \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$
Alcuni grafici (per vari valori di c)sono mostrati in figura 4 (visti da 'vicino') e in figura 5 (visti da 'lontano') la curva rossa é $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

4. La soluzione é:
$$y(x) = \sqrt{1+x^2} \left(c - 2\sqrt{1+x^2} \right)$$
dove $c = y_0 + 2$. Si vede che y é pari e che:
$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$
Alcuni grafici (per vari valori di c) sono mostrati in figura 6; la curva rossa é $g(x) = 2 + 2x^2$.

5. La soluzione é:
$$y(x) = x^2 \left(c + \ln\left(\frac{x}{1+2x} \right) \right)$$
dove $c = y_0 + \ln(3)$. Si ha:
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0^- \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > \ln(2) \\ -\infty & \text{se } c \leq \ln(2) \end{cases}$$
Alcuni grafici (per vari valori di c) sono mostrati in figura 7; la curva rossa é $g(x) = -\dfrac{x^2}{2+4x}$.

6. La soluzione é:
$$y(x) = e^{3x} \left(c + \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) \right)$$
dove $c = e^{-6} y_0 - \ln(\sqrt{3})$. Si ha:
$$\lim_{x \to 1^+} y(x) = +\infty \qquad , \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c \geq 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$
Alcuni grafici (per vari valori di c) sono mostrati in figura 8 (visti da 'vicino') e in figura 9 (visti da 'lontano'); la curva rossa é $g(x) = -\dfrac{e^{3x}}{3x^2-3}$.

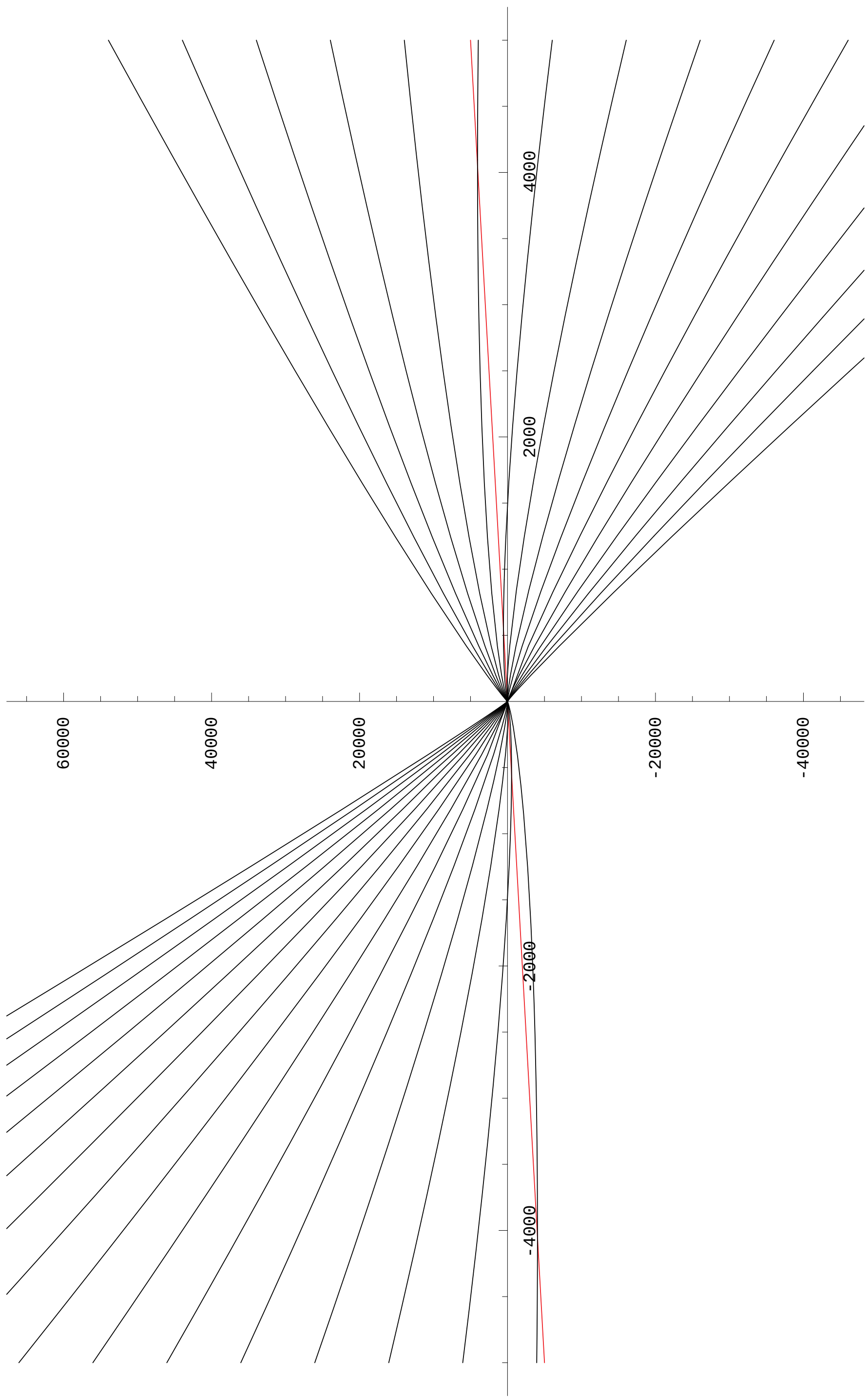

Figure 1: $y' = \frac{xy}{1+x^2} - 1$ (curve viste da lontano)

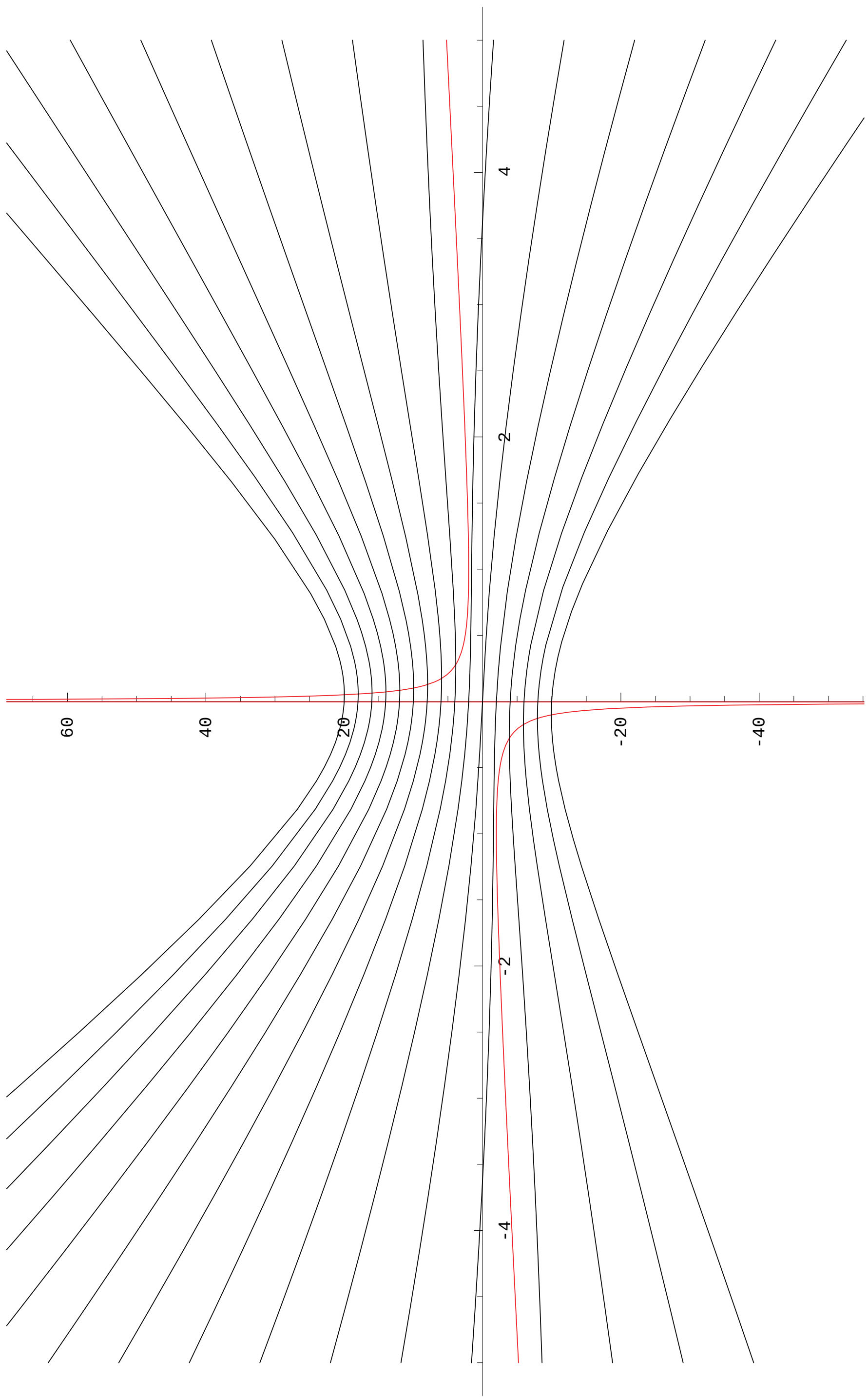

Figure 2: $y' = \frac{xy}{1+x^2} - 1$ (curve viste vicino a zero)

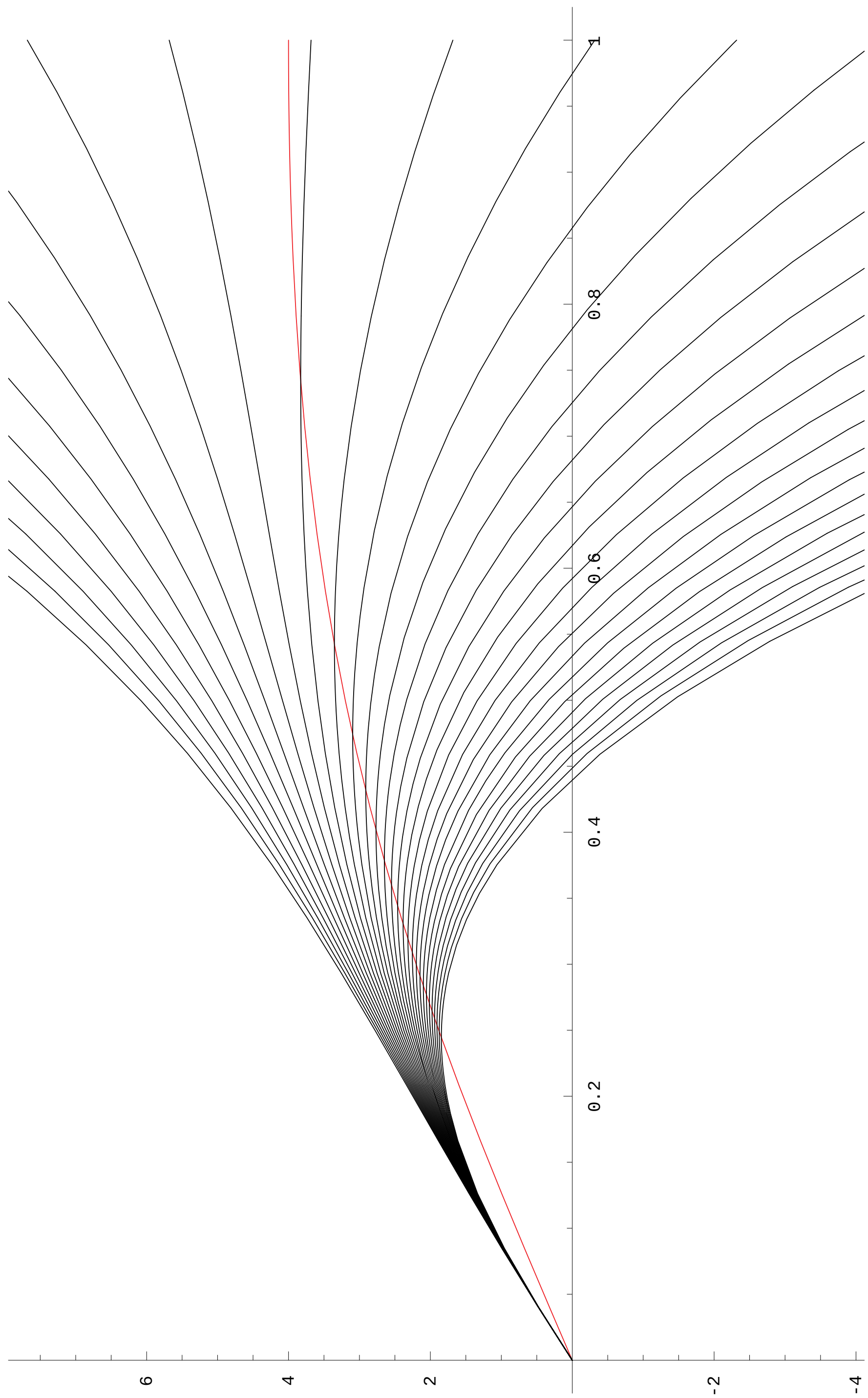

Figure 3: $y' = \frac{3y}{x} - \frac{24}{1+x^2}$

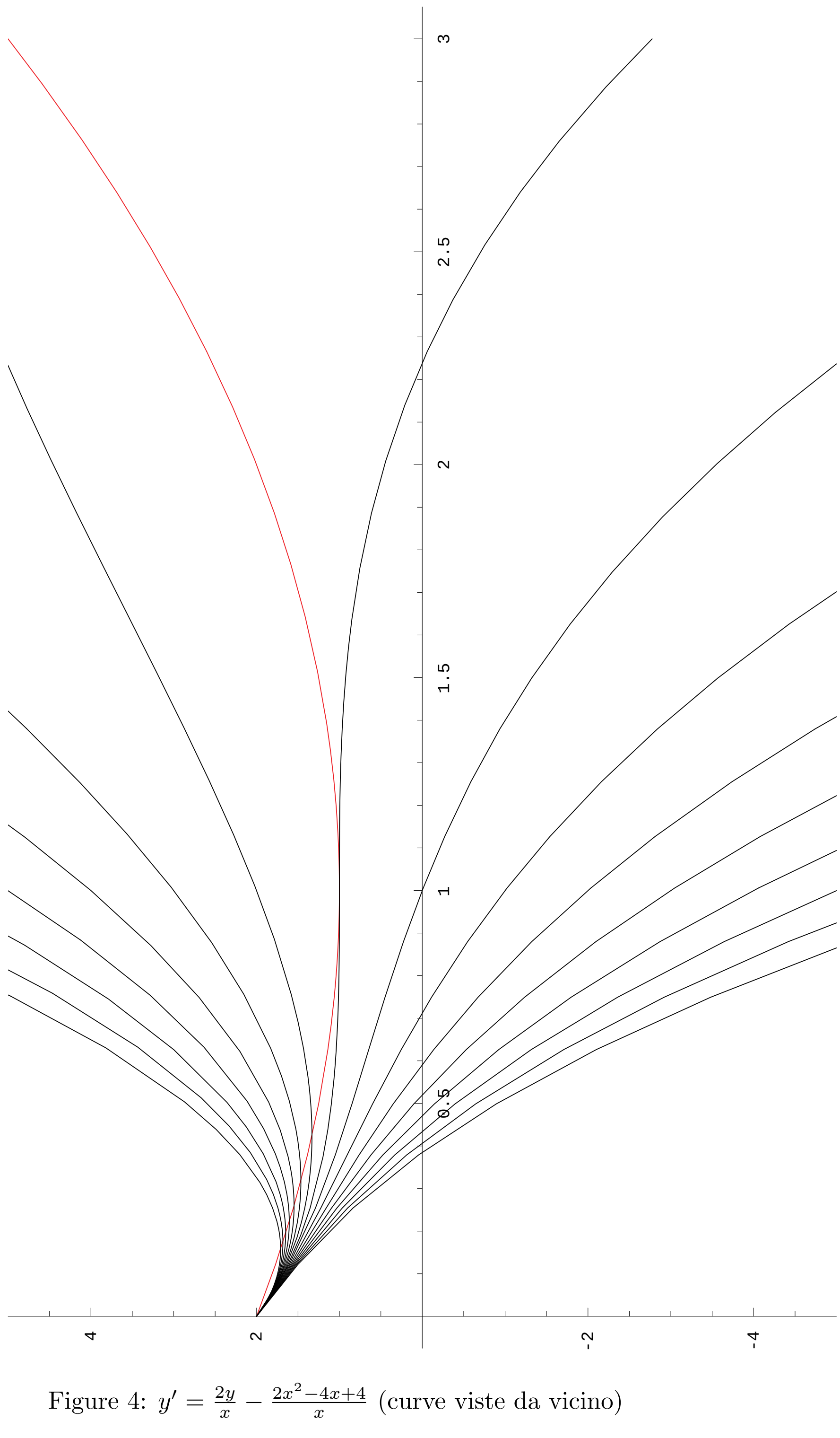

Figure 4: $y' = \frac{2y}{x} - \frac{2x^2-4x+4}{x}$ (curve viste da vicino)

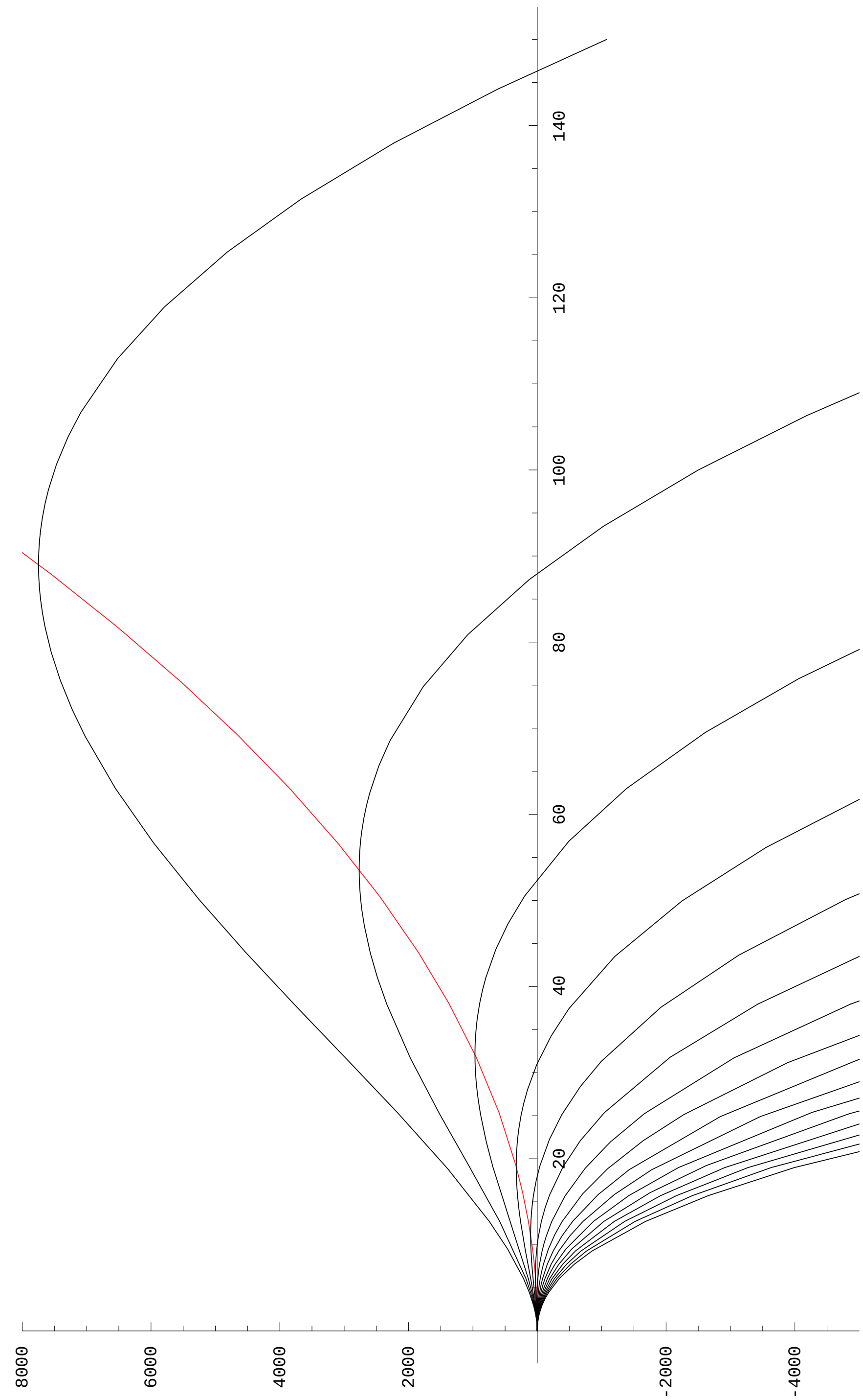

Figure 5: $y' = \frac{2y}{x} - \frac{2x^2-4x+4}{x}$ (curve viste da lontano)

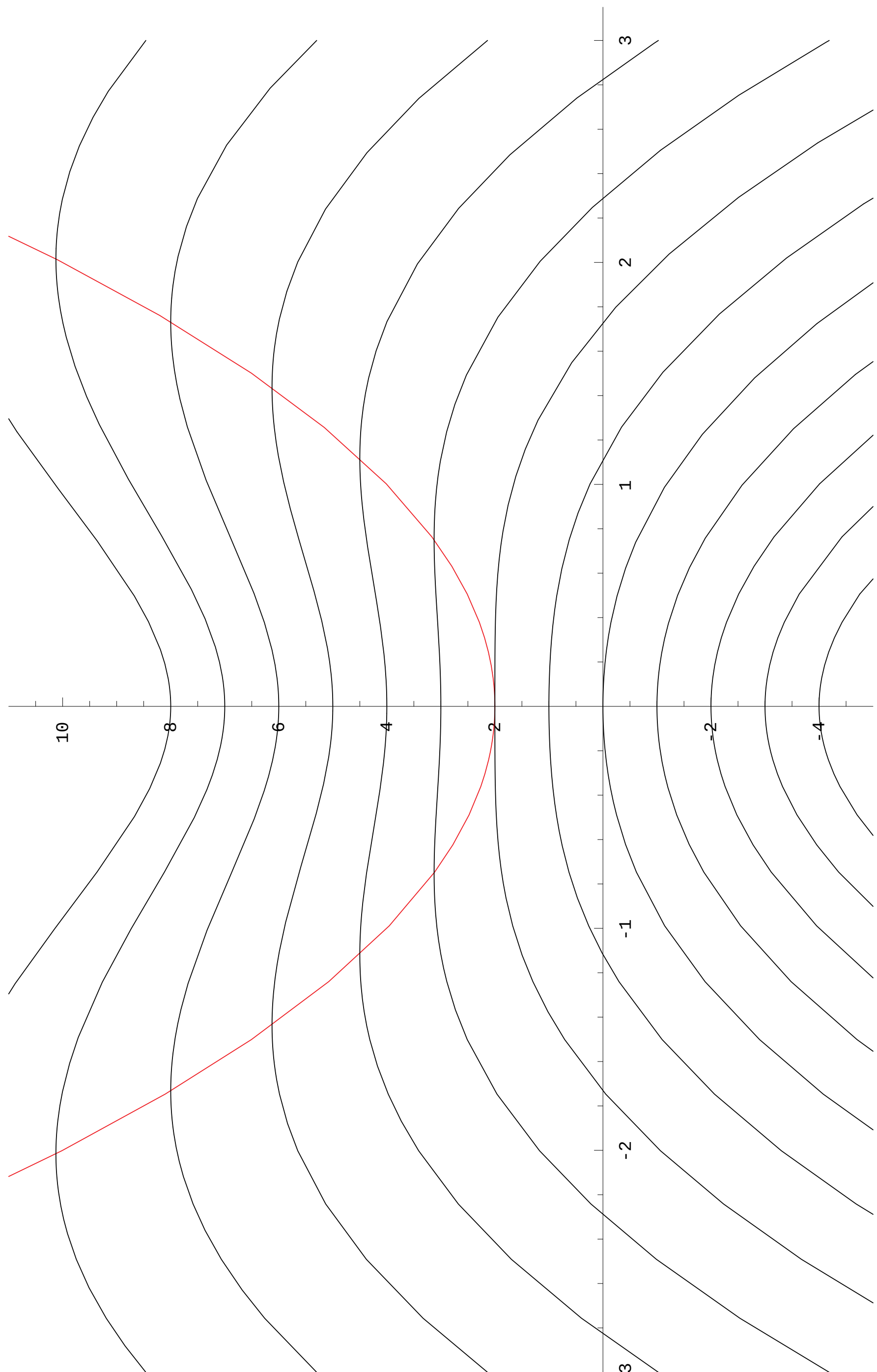

Figure 6: $y' = \frac{xy}{1+x^2} - 2x$

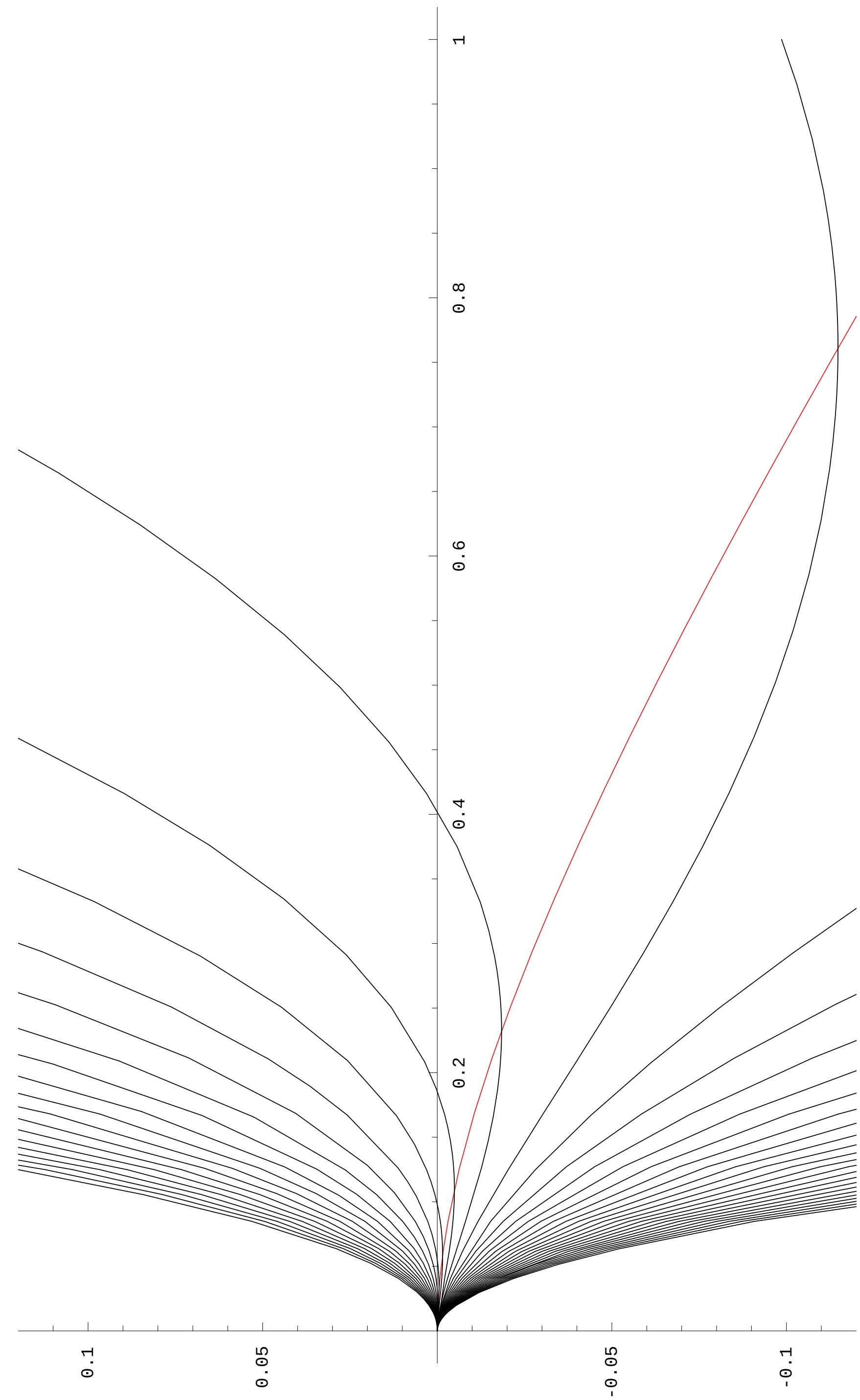

Figure 7: $y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{1+2x}$

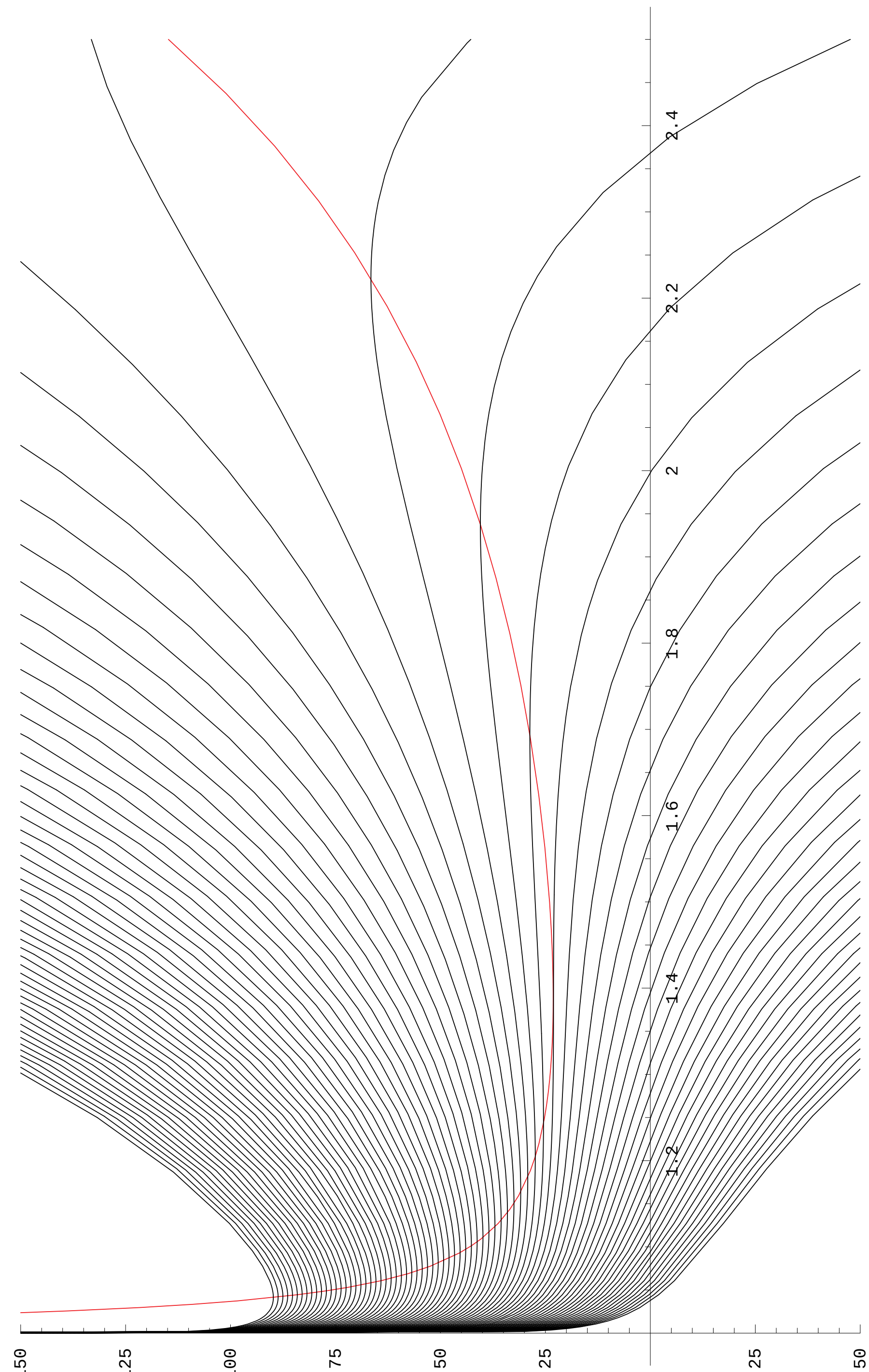

Figure 8: $y' = 3y - \frac{e^{3x}}{x^2-1}$ (curve viste da vicino)

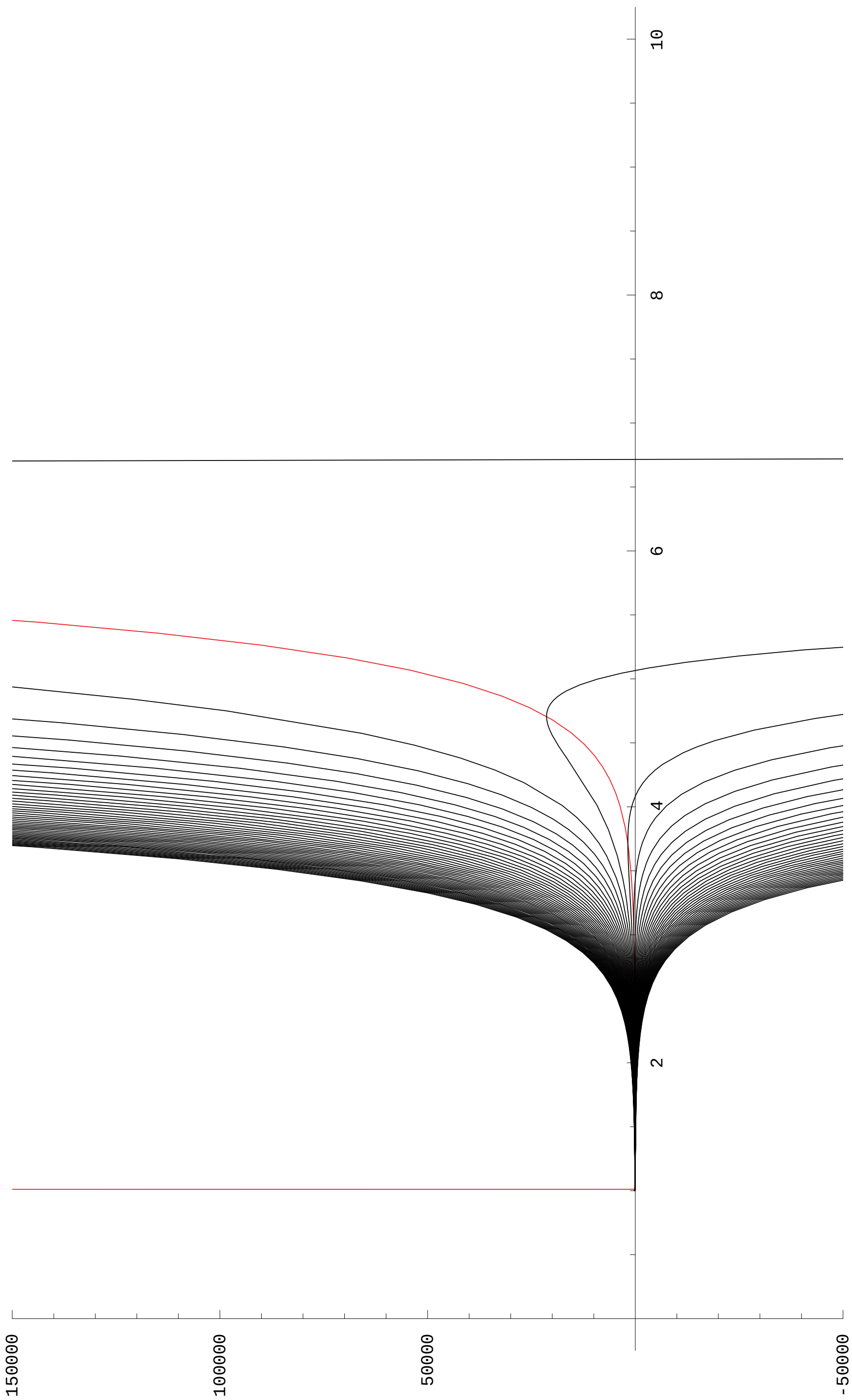

Figure 9: $y' = 3y - \frac{e^{3x}}{x^2-1}$ (curve viste da lontano