1 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Sia I un intervallo nei numeri reali con parte interna non vuota e siano $a, b : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Vogliamo considerare l'equazione differenziale:

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{Eq}$$

Trovare una soluzione (y) di (Eq) significherà trovare una funzione $y : I \to \mathbb{R}$, con y derivabile e tale che $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ per ogni x di I.
Per la verità, se si volesse impostare il problema in modo generale, potrebbe essere necessario considerare y definita su un sottintervallo $I_1 \subset I$. Nel caso però dell'equazione sopra si vede che questo non è necessario. Vedremo infatti che le soluzioni esistono fino a dove i coefficienti hanno senso – questo è collegato al fatto che l'equazione è *lineare* (in y e in y') ed è in *forma normale* (cioè il coefficiente di y' è eguale a 1).

Teorema 1.1. *Sia x_0 un punto assegnato in I. Allora per ogni numero reale y_0 esiste ed è unica $y : I \to \mathbb{R}$, soluzione di (Eq), tale che $y(x_0) = y_0$. Inoltre*

$$y(x) = e^{A(x)} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt \right\} \qquad \text{dove } A(x) := \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \tag{1}$$

Dimostrazione. Supponiamo di sapere che y risolve l'equazione e sia A definita come sopra. Moltiplichiamo entrambi i termini dell'equazione per $e^{-A(x)}$, che è sempre diverso da zero. Otteniamo

$$e^{-A(x)} b(x) = e^{-A(x)} y'(x) - a(x) e^{-A(x)} y(x) = (e^{-A(x)} y(x))'$$

(infatti $(e^{-A(x)})' = e^{-A(x)}(-A'(x)) = -a(x)e^{-A(x)}$).
Integrando tra x_0 e un x generico di I ricaviamo (nota che $A(x_0) = 0$)

$$\int_{x_o}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt = \left[e^{-A(t)} y(t) \right]_{x_o}^{x} = e^{-A(x)} y(x) - y_0$$

da cui la formula (1). Questo dimostra l'unicità della soluzione e la sua espessione. Viceversa è semplice verificare, facendo i calcoli, che la y definita da (1) è effettivamente una soluzione. □

La formula (1) si può anche trovare scritta come:

$$y(x) = e^{A(x)} \left\{ c + \int e^{-A(x)} b(x)\, dx \right\} \qquad \text{dove } A(x) := \int a(x)\, dx$$

intendendo che per trovare y si può: i) scegliere A una primitiva di a; ii) prendere una primitiva di $e^{-A(x)} b(x)$ (chiamiamola B); iii) porre $y(x) = e^{A(x)} \{c + B(x)\}$, al variare di tutte le costanti reali c.

Osservazione 1.2. *Il teorema sopra ci dice che l'equazione ha una e una sola soluzione, una volta fissato il valore della soluzione in un punto prefissato. Il problema di risolvere l'equazione con la condizione aggiuntiva detta sopra si chiama* problema ai dati iniziali *o* problema di Cauchy.

L'esistenza e l'unicità della soluzione per il problema di Cauchy si può esprimere anche nel seguente modo: la famiglia delle curve y che risolvono l'equazione (Eq) passano per tutti i punti (x_0, y_0) di $I \times \mathbb{R}$ (esistenza) e per ognuno di questi punti passa una sola curva (unicità) – detto altrimenti tali curve non si "intrecciano" tra loro.

2 Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili

Siano I e J due intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e siano $A : J \to \mathbb{R}$, $B : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = A(y)B(x) \tag{EVS}$$

Per soluzione di (EVS) intenderemo una funzione $y : I_1 \to \mathbb{R}$, definita su un sottointervallo aperto $I_1 \subset I$, y derivabile con le proprietà $y(x) \in J$ e $y'(x) = A(y(x))B(x)$ per ogni x di I_1. A differenza delle equazioni lineari tra le incognite c'è anche il dominio della soluzione che, come vedremo, non è necessariamente l'intervallo I di partenza.

Osservazione 2.1. *Se $y_0 \in J$ è tale che $A(y_0) = 0$, allora $y(x) = y_0$ per ogni x di I è una soluzione di* (EVS)*, definita su I.*

Teorema 2.2. *Siano I e J intervalli aperti e siano poi x_0 un punto assegnato in I e y_0 un punto assegnato in J.*
Allora esiste $\delta > 0$ ed esiste $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to J$ soluzione di (EVS) *tale che $y(x_0) = y_0$.*
Inoltre se $A(y_0) \neq 0$ e δ è sufficientemente piccolo, $A(y(x)) \neq 0$ per ogni x in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e y è univocamente determinata dalla formula

$$y(x) = F^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} B(t)\,dt\right) \qquad \textit{dove } F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{A(s)} \tag{2}$$

Dimostrazione. Se $A(y_0) = 0$ $y(x) = y_0$ è soluzione e non c'è altro da dimostrare.

Supponiamo allora che $A(y_0) > 0$ (se è < 0 si fa in maniera analoga).
Dimostriamo per prima cosa che la formula (2) ha senso e definisce una soluzione. Per questo cominciamo col trovare $\epsilon > 0$ tale che $]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[\subset J$ e $A(y) > 0$ per ogni $y \in]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$; allora la funzione F definita in (2) ha senso per $y \in]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ e per il teorema del calcolo integrale $F'(y) = 1/A(y) > 0$ per tutti tali y. Quindi F è strettamente crescente in $]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$, per cui trasforma l'intervallo $]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$ in un altro intervallo aperto $J_1 = F(]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[)$, che per come è definito contiene lo zero (dato che $F(y_0) = 0$). Di conseguenza si può definire l'inversa $F^{-1} : J_1 \to]y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon[$. Per x vicino a x_0 l'espressione $G(x) := \int_0^x B(t)\,dt$ è vicina a zero e quindi è in J_1; dunque esiste $\delta > 0$ tale che per $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ha senso considerare $y(x) := F^{-1}(G(x))$. Applicando il teorema sulla derivata della funzione inversa:

$$y'(x) = \frac{d}{dx}F^{-1}(G(x)) = (F^{-1})'(G(x))G'(x) =$$
$$\frac{1}{F'(F^{-1}(G(x)))}B(x) = \frac{1}{F'(y(x))}B(x) = A(y(x))B(x),$$

e quindi y verifica l'equazione (EVS).

Viceversa supponiamo di sapere che $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I \to J$ è soluzione; allora pur di rimpicciolire $\delta > 0$ si ha che $A(y(x)) > 0$ per tutti gli x di $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Possiamo quindi dividere per $A(y(x))$ nell'equazione ottenendo

$$B(x) = \frac{y'(x)}{A(y(x))} \qquad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

che integrata tra x_0 e x dà

$$\int_{x_0}^{x} B(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)}{A(y(x))}\,dt = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{A(s)} = F(y(x))$$

Dato che la F ha derivata strettamente positiva, essa è strettamente crescente, dunque invertibile. Applicando F^{-1} alla riga precedente si deduce la formula (2). □

Osservazione 2.3. *Notiamo che il teorema precedente stabilisce esistenza e unicità della soluzione SE il dato iniziale y_0 NON è uno zero di A. Se y_0 è uno zero di A, può effettivamente accadere che ci siano più soluzioni con tale dato iniziale. Una di queste è sicuramente la soluzione costante che abbiamo già individuato.*

Esempio 2.4. *Studiamo la famiglia delle soluzioni dell'equazione*

$$y' = y^2$$

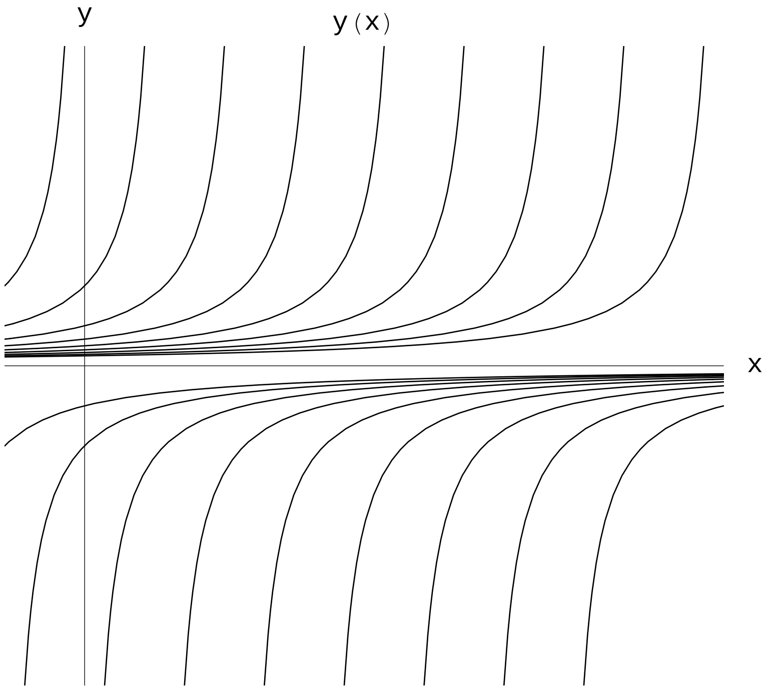
In questo caso $I = J = \mathbb{R}$, $A(y) = y^2$ *e* $B(x) = 1$.
Per prima cosa individuiamo gli zeri di A, *che consistono dell'unico punto* $y = 0$. *Quindi c'è la soluzione costante* $y(x) = 0$ *per ogni* x.
Fissiamo ora x_0 *in* $\mathbb{R}$ *e* $y_0 \neq 0$; *cominciamo con* $y_0 > 0$. *Allora, con le notazioni introdotte sopra,*

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = \left[-\frac{1}{s}\right]_{y_0}^{y} = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}$$

In questo caso $F :]0, +\infty[\to \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$, F *strettamente crescente e* $F^{-1} : \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[\to]0, +\infty[$, $F^{-1}(r) = \dfrac{y_0}{1 - ry_0}$ *e quindi per la formula*

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$$

(dato che $\int_{x_0}^{x} dt = x - x_0$*). Tale espressione ha senso fino a quando* $x - x_0 \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$ *cioè se* $x < x_0 + \dfrac{1}{y_0}$; *si vede subito che se* $x \to x_0 + \dfrac{1}{y_0}$ *(da sinistra) allora* $y(x) \to +\infty$, *cioè la soluzione "esplode"al tempo (finito)* $x_0 + \dfrac{1}{y_0}$. *D'altro canto se* $x \to -\infty$ *allora* $y(x) \to 0$.
Passiamo a considerare $y_0 < 0$. *Anche in questo caso* F *è definita da* $F(y) = \dfrac{1}{y_0} - \dfrac{1}{y}$, *però nell'intervallo* $]-\infty, 0[$ *che è quindi una funzione decrescente con valori in* $\left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[$. *Dunque* $F^{-1} : \left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[\to]-\infty, 0[$ *è decrecente (ed è finita dalla stessa espressione del caso precedente). Come prima* $y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}$, *però per* $x > \dfrac{1}{y_0}$ *e si ha che* $y(x) \to -\infty$ *quando* $x \to \dfrac{1}{y_0}$ *(da destra) e* $y(x) \to 0$ *se* $x \to +\infty$. *Possiamo tracciare i seguenti grafici:*



Si vede quindi che in questo caso vale anche un risultato di unicità: qualunque siano x_0, y_0 *esiste una e una sola soluzione* y *con* $y(x_0) = y_0$. *Tale soluzione esiste per ogni* x *se e solo se*

$y_0 = 0$: se $y_0 > 0$ la y esplode a $+\infty$ a un tempo $\bar{x} > x_0$, se $y_0 < 0$ la y esplode a $-\infty$ a un tempo $\bar{x} < x_0$. Si può notare che l'intervallo di esistenza $]-\infty, \bar{x}[$ (o $]\bar{x}, +\infty[$) diventa sempre più lungo via via che y_0 tende a zero.

Esempio 2.5. *Studiamo la famiglia delle soluzioni dell'equazione*

$$y' = \sqrt{y}$$

In questo caso $I = \mathbb{R}$, $J = [0, +\infty[$ [1]*, $A(y) = \sqrt{y}$ e $B(x) = 1$. Dato che $A(0) = 0$ la costante $y(x) = 0$ è soluzione.*
Fissiamo ora x_0 in $\mathbb{R}$ e $y_0 > 0$. Allora

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \left[2\sqrt{s}\right]_{y_0}^{y} = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y_0}.$$

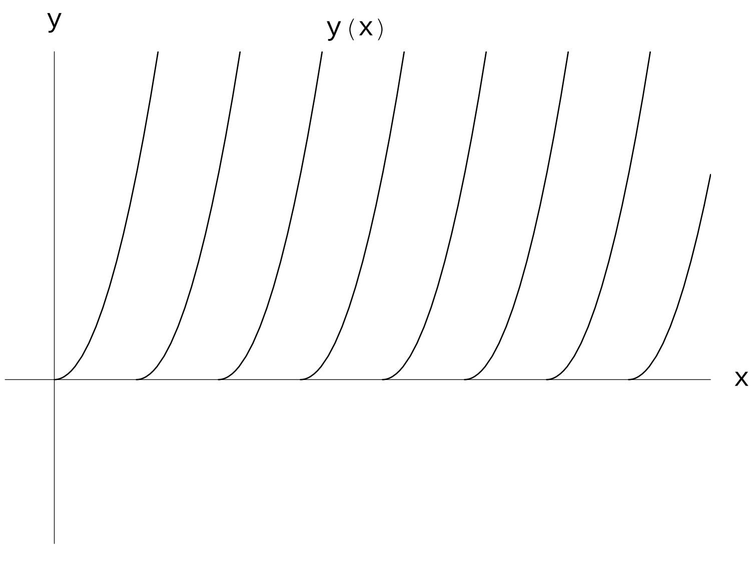
Dunque $F : [0, +\infty[\to [-2\sqrt{y_0}, +\infty[$ e $F^{-1} : [-2\sqrt{y_0}, +\infty[\to [0, +\infty[$ e $F^{-1}(r) = (\sqrt{y_0} + r/2)^2$: quindi

$$y(x) = \left(\frac{2\sqrt{y_0} + (x - x_0)}{2}\right)^2 \qquad x > x_0 - 2\sqrt{y_0}$$

Notiamo che

$$\lim x \to (x_0 - 2\sqrt{y_0})^+ y(x) = 0 \qquad , \qquad \lim x \to (x_0 - 2\sqrt{y_0})^+ y(x)' = 0$$

quindi $y(x)$ si può prolungare con valore zero per $x \leq x_0 - 2\sqrt{y_0}$, ottendo cosí una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$. Questo fatto ha la seguente conseguenza: mentre è vero che se $y_0 > 0$ la soluzione con $y(x_0) = y_0$ è unica lo stesso non si puó dire se $y_0 = 0$. In quest'ultimo caso infatti, partendo da $y(x_0) = 0$ si può continuare con il valore 0 per ogni $x > x_0$ oppure si può uscire da zero seguendo la curva che si incolla a zero in x_0 (cioè la parabola $y(x) = (x - x_0)^2/4$). Si può addirittura prendere $y(x) = 0$ su un intervallo $[x_0, \bar{x}]$ (con ($\bar{x} > x_0$) e poi staccarsi da zero con la parabola $y(x) = (x - \bar{x})^2/4$: quindi esistono infinite soluzioni dell'equazioni con $y(x_0) = 0$.



Osservazione 2.6. *Anche nel caso delle equazioni a variabili separabili la famiglia delle soluzioni (almeno quelle non costanti) dipende essenzialmente da un parametro. Supponiamo infatti che J sia un intervallo in cui A è diversa da zero, per esempio sia $A(y) > 0$ $\forall y \in J$.*

[1] per ricondurci al teorema in realtà bisogna considerare $J =]0, +\infty[$ e arrivare a 0 con un procedimento di limite

Sia $\bar{F}$ una primitiva qualunque di $1/A$ in J; è chiaro che $\bar{F}$ è una funzione continua strettamente crescente e dunque $\bar{J} := \bar{F}(J)$ è un intervallo e $\bar{F} : J :\to \bar{J}$ è biunivoca. Ne segue che $\bar{F}^{-1} : \bar{J} \to J$.
Adesso se F è la primitiva introdotta nella formula (2), allora $F(y) = \bar{F}(y) + c$, per una opportuna costante c. Allora $F(J) = \bar{J}_c$, dove $\bar{J}_c := \{y + c : y \in \bar{J}\}$ (l'intervallo translato di c), $F^{-1} : \bar{J}_c \to J$ e $F^{-1}(y) = \bar{F}^{-1}(y - c)$.
Prendiamo inoltre $\bar{G} : I \to \mathbb{R}$ una qualunque primitiva di B, ci sarà un'altra costante c' tale che $G(x) = \int_{x_0}^{x} B(t)\,dt = \bar{G}(x) + c'$. Allora la y definita in (2) risulta definita da

$$y(x) = \bar{F}^{-1}\left(\bar{G}(x) + C\right)$$

dove $C = c + c'$. Notiamo che, per come è impostato il problema, la costante C deve verificare $\bar{F}(y_0) = G(x_0) + C$.
Viceversa, per ogni valore di C la y funzione definita sopra è soluzione fino a quando ha senso e cioè su ogni intervallo $\bar{I}$ tale che $\bar{I} \subset I$ e $\bar{G}(\bar{I}) + C \subset \bar{J}$.

Esempio 2.7. *Studiamo le soluzioni di*

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

In questo caso $J =]-1, 1[$ e $A(y) = 1/\sqrt{1 - y^2}$. Prima di tutto troviamo una primitiva di $1/A$:

$$\bar{F}(y) \left(\in \int \sqrt{1 - y^2}\,dy\right) = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1 - y^2} + \arcsin(y)\right)$$

(abbiamo scelto la prinitiva che si annulla in zero). Quindi $\bar{J} = \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ (dato che F è crescente, gli estremi di $\bar{J}$ sono esattamente le immagini degli estremi di J). Con le stesse notazioni di sopra possiamo prendere $\bar{G}(x) = x^2/2$ e dunque la famiglia delle soluzioni è data da

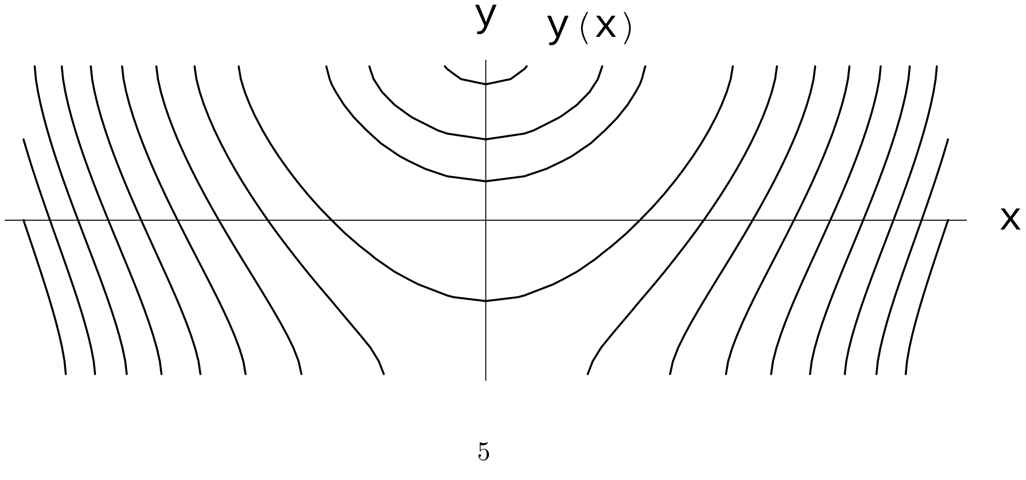
$$y(x) = \bar{F}^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Se vogliamo stabilire, a partire da C, quali sono gli intervalli delle x in cui y è definita dobbiamo imporre

$$\frac{x^2}{2} + C \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\Leftrightarrow x^2 \in \left]-\frac{\pi}{2} - 2C, \frac{\pi}{2} - 2C\right[$$

Questa condizione dà:

- *se $C \geq \frac{\pi}{4}$ nessuna x;*
- *se $-\frac{\pi}{4} < C < \frac{\pi}{4}$ le x tali che $-\sqrt{\pi/2 - 2C} < x < \sqrt{\pi/2 - 2C}$*
- *se $C \leq -\frac{\pi}{4}$ le x tali che $\sqrt{-\pi/2 - 2C} < x < \sqrt{\pi/2 - 2C}$ e le x tali che $-\sqrt{-\pi/2 - 2C} < x < \sqrt{-\pi/2 - 2C}$.*



3 Teoremi di esistenza e unicità

Diamo ora, senza dimostrazione, un importante teorema sulle equazioni differenziali del primo ordine.

Teorema 3.1 (Teorema di Cauchy)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua rispetto alle sue (due) variabili. Supponiamo che $F(x, y)$ sia* lipschitziana *in y (uniformente rispetto a x), cioè che esista una costante L tale che*

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq |y_2 - y_1| \qquad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega \tag{3}$$

Allora dato comunque un punto (x_0, y_0) in Ω esistono $\delta > 0$ e una UNICA funzione $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ tali che $(x, y(x)) \in \Omega$ per ogni x in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, y è derivabile e risolve il problema di Cauchy*:*

$$\begin{cases} y'(x) = F(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Inoltre y dipende con continuità *da (x_0, y_0) nel senso che, se $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$, allora si può trovare un $\delta > 0$ uguale per tutti gli n, tale che le soluzioni y_n con $y_n(x_n) = y_n$ sono definite in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e hanno la proprietà:*

$$y_n(x) \to y(x) \qquad \text{per ogni } x \text{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Osservazione 3.2. *Dato che il teorema sopra riguarda i punti vicini a (x_0, y_0), in realtà basta richiedere la disuguaglianza (3) solo per (x, y_1), (x, y_2) in un disco $I((x_0, y_0), \epsilon)$ di raggio $\epsilon > 0$ contenuto in Ω. Possiamoallora enunciare il teorema in maniera lievemente differente.*
Se per ogni (x_0, y_0) di Ω si trovano un $\epsilon > 0$ ed una costante L (dipendenti da (x_0, y_0)) per cui

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq |y_2 - y_1| \qquad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in I((x_0, y_0), \epsilon) \tag{4}$$

si dice che $F(x, y)$ è localmente *lipschitziana in y e in questo caso vale esattamente lo stesso teorema.*
Per esempio se per ogni x la funzione $y \mapsto F(x, y)$ è derivabile e tale derivata rispetto a y (che si denota usualmente con $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y)$) è continua rispetto a (x, y), allora non è difficile vedere che l'ipotesi (4) è verificata.

Notiamo che il teorema sopra mette in evidenza la proprietà chiave per avere l'unicità della soluzione. Se confrontiamo questo risultato con i casi precedentemente trattati si vede per esempio che il caso delle equazioni lineari è un caso particolare. In questo caso infatti $\Omega = \{(x, y) : x \in I, y \in \mathbb{R}\}$ e $F(x, y) = a(x)y + b(x)$ verifica (4), dato che

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = a(x) \qquad \text{è continua rispetto a } (x, y)$$

Al contrario le equazioni a variabili separabili non rientrano in generale nelle ipotesi del teorema di Cauchy: in questo caso infatti

$$\Omega = \{(x, y) : x \in I, y \in J\} \qquad F(x, y) = A(y)B(x).$$

Dire che F è lipschitziana in y è lo stesso che A lipschitziana, e tal proprietà è PIÙ FORTE della semplice continuità di A che abbiamo richiesto. Negli esempi fatti prima si vede che $F(x, y) := A(y) = y^2$ verifica (4), perché $\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 2y$, che è continua, e dunque l'equazione $y' = y^2$ ha soluzione unica (per il problema con dato iniziale assegnato); al contrario $a(y) = \sqrt{y}$ non è lipschiziana vicino a zero e infatti non vale l'unicità della soluzione di $y' = \sqrt{y}$ quando si parte da $y(x_0) = 0$.

Quanto fatto sopra per le equazioni si può estendere al caso dei *s*istemi di equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} y_1' = & F_1(x, y_1, \ldots, y_N) \\ \quad \vdots & \\ y_1' = & F_N(x, y_1, \ldots, y_N) \end{cases} \tag{SYS}$$

dove $F_1, \dots, F_N$ sono delle funzioni continue di $N+1$ variabili. Tale sistema si può scrivere formalmente in modo analogo all'equazione introducendo il formalismo vettoriale. Poniamo:

$$y(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix}, \qquad F(x, y_1, \dots, y_n) := \begin{pmatrix} F_1(x, y_1 \dots, y_N) \\ \vdots \\ F_N(x, y_1 \dots, y_N) \end{pmatrix}$$

In questo modo F sarà una funzione definita su (un aperto di) $\mathbb{R}^{N+1}$ a valori in $\mathbb{R}^N$ e l'incognita sarà la funzione Y definita su un intervallo I di $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^N$ verificante

$$Y'(x) = F(x, Y(x)).$$

Vale anche per i sistemi il teorema di Cauchy. Ricordiamo che in $\mathbb{R}^N$ è definita la *norma* (o *modulo*) del vettore Y di coordinate $y_1, \dots, y_N$ come $\|Y\| := \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_N^2}$.

Teorema 3.3 (Teorema di Cauchy nel caso vettoriale)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^N$ una funzione continua ristetto alle sue $(N+1)$ variabili. Supponiamo che $F(x, Y)$ sia* lipschitziana *in Y (uniformente rispetto a x), cioè che esista una costante L tale che*

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| \leq \|Y_2 - Y_1\| \qquad \forall (x, Y_1), (x, Y_2) \in \Omega \tag{5}$$

Allora dato comunque un punto (x_0, Y_0) in Ω esistono $\delta > 0$ e una UNICA funzione $Y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}^N$ tali che $(x, Y(x)) \in \Omega$ per ogni x in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, Y è derivabile e risolve il problema di Cauchy*:*

$$\begin{cases} Y(x)' = F(x, Y(x)) & \textit{per ogni } x \textit{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

Inoltre Y dipende con continuità *da (x_0, Y_0) nel senso che, se $x_n \to x_0$ e $Y_n \to Y_0$ (in $\mathbb{R}^N$), allora si può trovare un $\delta > 0$ uguale per tutti gli n, tale che le soluzioni y_n con $Y_n(x_n) = Y_n$ sono definite in $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ e hanno la proprietà:*

$$Y_n(x) \to Y(x) \qquad \textit{per ogni } x \textit{ in }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

4 Struttura delle soluzioni delle equazioni lineari

Un sistema di equazioni lineari del primo ordine è un problema del tipo

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x) y_1 + \cdots + a_{1,N} y_N + b_1(x) \\ \quad \vdots \\ y_N' = a_{N,1}(x) y_1 + \cdots + a_{N,N} y_N + b_N(x) \end{cases} \tag{LSYS}$$

dove $a_{i,j}$ e b_i sono delle funzioni continue definite su un intervallo I e a valori reali Chiaramente il problema (LSYS) è un caso particolare del sistema del primo ordine (SYS), ponendo: $F(x, Y) := A(x)Y + B(x)$, dove:

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,N}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1}(x) & \cdots & a_{N,N}(x) \end{pmatrix}, \qquad B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{pmatrix}$$

È altresì chiaro che tale F verifica l'ipostesi di lipschitzianità (locale) richiesta dal teorema di Cauchy, in quanto, preso un qualunque intervallo $[x_1, x_2] \subset I$, per ogni x in $[x_1, x_2]$ si ha (per le note proprietà del prodotto matriciale):

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\| = \|A(x)(Y_1 - Y_2)\| \leq \left(\max_{\substack{i,j=1,\dots,N \\ x_1 \leq x \leq x_2}} |a_{i,j}(x)| \right) \|Y_1 - Y_2\|.$$

Nel caso dei sistemi lineari il teorema di Cauchy si può migliorare affermando che la soluzione esiste su tutto l'intervallo I in cui esistono i coefficienti A e B (la soluzione non può esplodere ad un tempo dell'intervallo I). Per completezza scriviamo questo teorema di esistenza e unicità nel caso lineare.

Teorema 4.1 (Esistenza e unicità per il problema di Cauchy per sistemi di equazioni differenziali lineari del primo ordine)**.**
Siano $a_{i,j}$ e b_i, $i, j = 1, \dots, N$, delle funzioni continue da un intervallo aperto I di $\mathbb{R}$, a valori reali, e siano A e B la matrice $N \times N$ e il vettore N-dimensionale introdotti sopra.

Per ogni x_0 in I e per ogni Y_0 in $\mathbb{R}^N$ esiste una unica $Y : I \to \mathbb{R}^N$ derivabile e tale che

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0. \end{cases}$$

Tale Y dipende con continuità dai dati iniziali x_0 e Y_0.

In termini scalari l'enunciato è equivalente a dire che assegnati ad arbitrio x_0 in I e $y_{0,1}, \dots, y_{0,N}$ in $\mathbb{R}$ esistono uniche N funzioni derivabili $y_1, \dots, y_N : I \to \mathbb{R}$, derivabili e tali che

$$\begin{cases} y_1' = a_{1,1}(x)y_1 + \cdots + a_{1,N}y_N + b_1(x) \\ \vdots \\ y_N' = a_{N,1}(x)y_1 + \cdots + a_{N,N}y_N + b_N(x) \\ y_1(x_0) = y_{0,1}, \dots, y_N(x_0) = y_{0,N} \end{cases}$$

Quanto detto per le equazioni/sistemi del primo ordine si potrebbe ripetere per le equazioni/sistemi di ordine arbitrario. Si può infatti vedere, per esempio, che una equazione di ordine N

$$a_N(x)y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \cdots + a_0(x)y = b(x) \tag{EQ-N}$$

(con $a_n(x) \neq 0 \ \forall x \in I$) si può mettere in forma di sistema considerando il problema $Y' = A(x)Y + B(x)$ dove

$$A(x) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_N(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_N(x)} & -\frac{a_2(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{N-1}(x)}{a_N(x)} \end{pmatrix} \qquad B(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_N(x)} \end{pmatrix}$$

Lasciamo al lettore la verifica del fatto che, se

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_N(x) \end{pmatrix}$$

verifica il sistema allora $y := y_1$ è soluzione dell'equazione (EQ-N). Ne segue allora il teorema seguente.

Teorema 4.2. *Sia x_0 un punto fissato in I. Per ogni N-pla $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ esiste unica una soluzione di* (EQ-N) *$y : I \to \mathbb{R}$ che verifichi le* condizioni iniziali $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(N-1)} = y_{N-1}$.

Vediamo ora alcune proprietà della famiglia delle soluzioni del sistema di N equazioni differenziali del primo ordine (LSYS). Per quanto appena detto è chiaro che le stesse proprietà saranno valide per la famiglia delle soluzioni dell'equazione di ordine N. Consideriamo prima di tutto il *sistema omogeneo*, cioè il caso con $B = 0$:

$$Y' = A(x)Y \tag{SYS-0}$$

Proposizione 4.3. *Se* Y_1 *e* Y_2 *sono soluzioni di* (SYS-0) *e se* λ, μ *sono due numeri reali, allora* $Y := \lambda Y_1 + \mu Y_2$ *è soluzione di* (SYS-0)*. Detto altrimenti l'insieme delle soluzioni del problema omogeneo* è uno spazio lineare.

Inoltre tale spazio ha dimensione N*, cioè si possono trovare* N *suoi elementi (N soluzioni)* $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_N$ *tali che una qualunque soluzione* Y *si può scrivere come combinazione lineare* $Y := \lambda_1 \hat{Y}_1 + \cdots + \lambda_N \hat{Y}_N$*, per opportune costanti* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$*.*

Dimostrazione. È chiaro che, se $Y := \lambda Y_1 + \mu Y_2$:

$$Y' = (\lambda Y_1 + \mu Y_2)' = \lambda Y_1' + \mu Y_2' = \lambda A Y_1 + \mu A Y_2 = A(\lambda Y_1 + \mu Y_2) = AY,$$

e quindi le soluzioni formano uno spazio lineare. Definiamo ora

$$\hat{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \hat{e}_N := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

e definiamo, per $i = 1, \ldots, N$, le funzioni $\hat{Y}_i$ come le soluzioni del problema (SYS-0) con dato iniziale $\hat{Y}_i(0) = \hat{e}_i$ (tali soluzioni esistono per il teorema di Cauchy). Vediamo che una qualunque soluzione Y si scrive come combinazione lineare di $\hat{Y}_1, \ldots, \hat{Y}_N$. Infatti, dato che $\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_N$ è una base per $\mathbb{R}^N$ possiamo trovare $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ tali che $Y(0) = \lambda_1 \hat{e}_1 + \cdots \lambda_N \hat{e}_N$. Prendiamo $\bar{Y} := \lambda_1 \hat{Y}_1 + \cdots \lambda_N \hat{Y}_N$. Dato che è combinazione lineare di soluzioni $\bar{Y}$ è una soluzione e inoltre $\bar{Y}(0) = \lambda_1 \hat{Y}_1(0) + \cdots \lambda_N \hat{Y}_N(0) = \lambda_1 \hat{e}_1 + \cdots \lambda_N \hat{e}_N = Y(0)$. Per l'unicità della soluzione del problema di Cauchy si ha che $\bar{Y}(x) = Y(x)$ per ogni x e dunque $Y := \lambda_1 \hat{Y}_1 + \cdots \lambda_N \hat{Y}_N$, che è ciò che si voleva dimostrare. $\square$

Consideriamo ora il sistema completo.

Proposizione 4.4. *Se* Y_1 *e* Y_2 *sono soluzioni di* (SYS)*, allora* $Y := Y_1 - Y_2$ *è una soluzione del sistema omogeneo* (SYS)*.*

Viceversa se Y *è una soluzione di* (SYS) *e* Y_0 *è una soluzione di* (SYS-0)*, allora* $Y + Y_0$ *è una soluzione di* (SYS)*.*

Da quanto detto sopra si ha che, se si conosce una soluzione $\bar{Y}$ *di* (SYS)*, allora l'insieme delle soluzioni si può generare prendendo la somma di* $\bar{Y}$ *con una qualunque soluzione del sistema omogeneo:*

$$\{Y : Y \textit{risolve } (\text{SYS})\} = \left\{\bar{Y} + Y_0 : Y_0 \textit{ risolve } (\text{SYS-0})\right\}$$

Dimostrazione. Le dimostrazioni sono elementari e lasciate al lettore. $\square$

5 Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

In questo paragrafo consideriamo la seguente equazione:

$$ay'' + by' + cy = h(x) \tag{Eq.II}$$

dove a, b, c sono delle costanti e h è una funzione continua definita in un intervallo I di $\mathbb{R}$. L'equazione è del secondo ordine (almeno se $a \neq 0$), lineare e a coefficienti costanti. (h si chiama di solito il termine noto).
Assieme all'equazione completa consideriamo anche l'equazione omogenea:

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{Eq.II$_0$}$$

Per trovare delle formule risolutive conviene in un primo momento considerare a, b, c in $\mathbb{C}$, $h : I \to \mathbb{C}$ e cercare una soluzione complessa, cioè una funzione $y : I \to \mathbb{C}$ che sia derivabile due volte e tale che $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = h(x)$ per ogni x in I. Questo significa che $y(x) = y_1(x) + iy_2(x)$ con $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ derivabili due volte, che $y'(x) = y_1'(x) + iy_2'(x)$, $y''(x) = y_1''(x) + iy_2''(x)$ e che la relazione sopra è verificata. Non è difficile verificare che tutti i teoremi dei paragrafi precedenti valgono ancora nel caso complesso.

Cerchiamo ora y soluzione dell'omogenea della forma $y(x) = e^{wx}$ con w in $\mathbb{C}$. Per tale y si ha

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = aw^2e^{wx} + bwe^{wx} + ce^{wx} = (aw^2 + bw + c)e^{wx}$$

e quindi condizione necessaria e sufficiente perché y sia soluzione è che z sia radice del *polinomio caratteristico* $P(z) := az^2 + bz + c$. Supponiamo allora che P abbia due radici distinte z_1 e z_2. In questo caso $y_1(x) := e^{z_1x}$ e $y_2(x) := e^{z_2x}$ sono soluzioni e non è difficile verificare che esse sono linearmente indipenti tra loro. Per i teoremi dei paragrafi precedenti ogni soluzione y di (Eq.II_0) si scrive come

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{z_1x} + c_2e^{z_2x}$$

(perché formano uno spazio di dimensione due che quindi esaurisce tutte le soluzioni del problema).
Più complesso è lo studio del caso in cui P ha una sola soluzione, z_1, con molteplicità due, cioè $P(z) = a(z - z_1)^2$. In questo caso il metodo sopra fornisce solo le soluzioni del tipo $c_1e^{z_1x}$, che sono "troppo poche". Si vede in questo caso che un'altra soluzione è xe^{z_1x}, e allora, ragionando come nel caso precedente si può verificare che la famiglia delle soluzioni (dell'omogenea) è data da

$$y(x) := c_1e^{z_1x} + c_2xe^{z_1x}.$$

Questo risolve il problema se ci si accontenta di rimanere nei complessi - di solito però i problemi che ci interessano partono da coefficienti reali e hanno bisogno di soluzioni reali. In questo caso ci sono queste possibilità:

- P ha due radici reali distinte oppure una sola radice doppia che deve essere per forza reale. Siamo allora nella situazione studiata precedentemente: le soluzioni reali saranno esattamente quelle sopra, con l'unica avvertenza di prendere le costanti c_1 e c_2 nei reali.

- P ha due radici non reali, tra loro coniugate $z_1 = a + ib$ e $z_2 = a - ib$. Allora la soluzione dell'equazione è

  $$\begin{aligned} y(x) =& c_1e^{z_1x} + c_2e^{z_2x} = c_1e^{ax}(\cos(bx) + i\sin(x)) + c_2e^{ax}(\cos(bx) - i\sin(x)) \\ =& d_1e^{ax}\cos(bx) + d_2e^{ax}\sin(bx) \end{aligned}$$

  dove abbiamo preso $d_1 = c_1 + c_2$ e $d_2 = c_1 - ic_2$. Non è difficile convincersi che l'ultima formula scritta descrive ancora tutte e sole le soluzioni dell'omogenea, se si fanno variare d_1 e d_2 in $\mathbb{C}$ e che le soluzioni reali sono tutte e sole quelle con d_1 e d_2 in $\mathbb{R}$.

Questo risolve completamente il problema dell'omogenea.

Per risolvere l'equazione generale dobbiamo trovare una soluzione particolare dell'equazione completa (Eq.II) (e poi sommarvi tutte le possibili soluzioni dell'omogenea). Esiste un metodo generale per costruire una soluzione, ma è un po' complicato e ci accontenteremo di risolvere alcuni casi particolari. Anche in questo caso conviene trattare il problema nei complessi. Supporremo che

$$h(x) = \gamma e^{wx}$$

con γ e w numeri complessi. L'idea è di nuovo di cercare la soluzione della forma $\bar{y}(x) = \gamma_1e^{wx}$ per un opportuno γ_1. Facendo dei semplici calcoli:

$$a\bar{y}(x)'' + b\bar{y}'(x) + c\bar{y}(x) = (aw^2 + bw + c)\gamma_1e^{wx} = \gamma_1P(w)e^{wx}$$

Se w non è radice di P si può imporre che $\bar{y}$ sia soluzione, ottenendo

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{P(w)}$$

Se $P(w)=0$ il ragionamento non funziona (infatti e^{wx} è soluzione dell'omogenea e quindi non può servire). Supponiamo che w sia radice semplice di P. Allora si può cercare una soluzione della forma $\bar{y}(x)=\gamma_1 x e^{wx}$. Facendo i calcoli

$$a\bar{y}(x)''+b\bar{y}'(x)+c\bar{y}(x)=(aw^2+bw+c)\gamma_1 x e^{wx}+(2aw+b)\gamma' e^{wx}=\gamma_1 P'(w)e^{wx}$$

e dunque si può ricavare ($P'(w)\neq 0$ perchè w è semplice)

$$\gamma_1=\frac{\gamma}{P'(w)}$$

Rimane il caso in cui w sia radice doppia di P. Allora se si cerca una soluzione della forma $\bar{y}(x)=\gamma_1 x^2 e^{wx}$ si vede che va bene

$$\gamma_1=\frac{\gamma}{P''(w)}=\frac{\gamma}{2a}$$

Vediamo ora con degli esempi come si può utilizzare quanto sopra per risolvere dei problemi nei reali. Per questo è importante la seguente osservazione.

Osservazione 5.1. *Supponiamo che a,b,c siano reali. Allora se y è soluzione di $ay''+by'+cy=f(x)$ si ha che $\Re e(y)$ (risp. $\Im m(y)$) è soluzione di $ay''+by'+cy=\Re e(f(x))$ (risp. di $ay''+by'+cy=\Im m(f(x))$).*

Esempio 5.2. *Cerchiamo le soluzioni di*

$$y''+y=\sin(\omega x)$$

al variare di ω in $\mathbb{R}$. Prima di tutto troviamo le soluzioni dell' omogenea

$$y''+y=0.$$

In questo caso $P(z)=z^2+1$ che ha come radici i e $-i$. Dunque le soluzioni sono

$$c_1e^{ix}+c_2e^{-ix} \qquad\qquad c_1,c_2\in\mathbb{C}$$

se scritte in forma complessa e

$$d_1\cos(x)+d_2\sin(x) \qquad , \qquad d_1,d_2\in\mathbb{R}$$

se si cercano quelle reali. Cerchiamo ora una soluzione dell'equazione generale - per applicare i discorsi fatti sopra cerchiamo una soluzione di

$$y''+y=e^{i\omega x}$$

che, per quanto visto sopra, si può prendere come

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{P(i\omega)}e^{i\omega x}=\frac{1}{1-\omega^2}e^{i\omega x}$$

se $\omega^2\neq 1$, mentre se $\omega=\pm 1$

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{P'(\pm i)}xe^{\pm ix}=\pm\frac{1}{2i}xe^{\pm ix}=\mp\frac{i}{2}xe^{\pm ix}.$$

Dato che $\sin(x)=\Im m(e^{ix})$ possiamo prendere, come soluzione particolare la parte immaginaria dell $\bar{y}$ ora trovata, cioè:

$$\tilde{y}(x)=\Im m(\bar{y}(x))=\frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega x)$$

se $\omega^2\neq 1$, mentre se $\omega=\pm 1$

$$\tilde{y}(x)=\Im m(\bar{y}(x))=\mp\frac{1}{2}x\cos(x).$$

In definitiva la famiglia delle soluzioni è data da

$$y(x) = d_1 \cos(x) + d_2(sin(x) + \frac{1}{1-\omega^2}\sin(\omega x)$$

*se $\omega^2 \neq 1$, mentre nei due casi limite (***risonanza***) di $\omega = \pm 1$*

$$y(x) = d_1 \cos(x) + d_2(sin(x) \mp \frac{1}{2}x\cos(x).$$

La tecnica sopra descritta puó essere estesa a equazioni

$$ay'' + by' + cy = Q(x)e^{wx}$$

dove Q è un polinomio in x. In questo caso si vede che si può cercare una soluzione "particolare"della forma

$$\bar{y}(x) = \begin{cases} Q_1(x)e^{wx} & \text{se } w \text{ non è radice di } P \\ Q_1(x)xe^{wx} & \text{se } w \text{ è radice semplice di } P \\ Q_1(x)x^2e^{wx} & \text{se } w \text{ è radice doppia di } P \end{cases}$$

dove Q_1 è un polinomio (da trovare) dello stesso grado di Q.

Esempio 5.3. *Cerchiamo le soluzioni di*

$$y'' - 2y' + y = xe^{\omega x}$$

In questo caso $P(z) = z^2+2z+1$ che è un quadrato perfetto, e dunque ha l'unica radice doppia $z = 1$. Ne segue che le soluzioni dell'omogenea sono

$$d_1e^x + d_2xe^x \qquad\qquad d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

(consideriamo solo le soluzioni reali). Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa. Se $\omega \neq 1$ possiamo cercarla della forma

$$\bar{y}(x) = (\alpha x + \beta)e^{\omega x};$$

facendo i calcoli:

$$\bar{y}'(x) = (\alpha\omega x + \beta\omega + \alpha)e^{\omega x}; \qquad \bar{y}''(x) = (\alpha\omega^2 x + \beta\omega^2 + 2\alpha\omega)e^{\omega x};$$

da cui si ottengono le condizioni

$$\begin{cases} \alpha\omega^2 - 2\alpha\omega + \alpha = 1 \\ \beta\omega^2 + 2\alpha\omega - 2\beta\omega - 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

che dà

$$\alpha = \frac{1}{P(\omega)} \qquad \beta = -\frac{P'(\omega)}{P(\omega)}.$$

Se invece ω è proprio eguale a uno dobbiamo cercare la soluzione della forma

$$\bar{y}(x) = (\alpha x + \beta)x^2e^x = (\alpha x^3 + \beta x^2)e^x;$$

in questo caso

$$\bar{y}'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 + 3\alpha x^2 + 2\beta x)e^x = (\alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + 2\beta x)e^x$$

e

$$\begin{aligned} \bar{y}''(x) =& (\alpha x^3 + (\beta + 3\alpha)x^2 + 2\beta x + 3\alpha x^2 + 2(\beta + 3\alpha)x + 2\beta)e^x = \\ & (\alpha x^3 + (\beta + 6\alpha)x^2 + (4\beta + 6\alpha)x + 2\beta)e^x \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} & \bar{y}''(x) - 2\bar{y}'(x) + \bar{y}(x) = \\ & e^x((\alpha - 2\alpha + \alpha)x^3 + (\beta + 6\alpha - 2\beta - 6\alpha + \beta)x^2 + (4\beta + 6\alpha - 4\beta)x + 2\beta = \\ & (6\alpha x + 2\beta)e^x) \end{aligned}$$

che dà $\alpha = 1/6$ e $\beta = 0$.