ANALISI 1 [1]
PRIMA/SECONDA LEZIONE

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$
  - numeri interi ($\mathbb{N}$)

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$
  - numeri interi ($\mathbb{N}$)
  - numeri interi relativi ($\mathbb{Z}$)

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$
  - numeri interi ($\mathbb{N}$)
  - numeri interi relativi ($\mathbb{Z}$)
  - numeri razionali ($\mathbb{Q}$)

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$
  - numeri interi ($\mathbb{N}$)
  - numeri interi relativi ($\mathbb{Z}$)
  - numeri razionali ($\mathbb{Q}$)
  - numeri reali ($\mathbb{R}$)

Nozioni di Base

- LOGICA elementare $\longrightarrow$ anatomia di un enunciato matematico
- nozioni di TEORIA DEGLI INSIEMI $\longrightarrow$ gli oggetti di cui (tipicamente) parla la matematica
- in particolare alcuni INSIEMI NUMERICI IMPORTANTI $\longrightarrow$
  - numeri interi ($\mathbb{N}$)
  - numeri interi relativi ($\mathbb{Z}$)
  - numeri razionali ($\mathbb{Q}$)
  - numeri reali ($\mathbb{R}$)
  - numeri complessi ($\mathbb{C}$)

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è $\boxed{\textbf{VERA}}$ o $\boxed{\textbf{FALSA}}$

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è $\boxed{\textbf{VERA}}$ o $\boxed{\textbf{FALSA}}$

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"
- $\mathcal{Q} =$ "$2^{120} - 1$ è un numero pari"

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è $\boxed{\textbf{VERA}}$ o $\boxed{\textbf{FALSA}}$

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"
- $\mathcal{Q} =$ "$2^{120} - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R} =$ "la miliardesima cifra nello sviluppo decimale di π è 5"

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è **VERA** o **FALSA**

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"
- $\mathcal{Q} =$ "$2^{120} - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R} =$ "la miliardesima cifra nello sviluppo decimale di π è 5"
- $\mathcal{S} =$ "$2 \geq 0$"

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è $\boxed{\textbf{VERA}}$ o $\boxed{\textbf{FALSA}}$

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"
- $\mathcal{Q} =$ "$2^{120} - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R} =$ "la miliardesima cifra nello sviluppo decimale di π è 5"
- $\mathcal{S} =$ "$2 \geq 0$"
- $\mathcal{M} =$ "Mourinho è un personaggio molto simpatico" ???????
  $\mathcal{M}$ non è un enunciato accettabile...

Logica

ENUNCIATI Un **enunciato** (o una proposizione) è un'affermazione di cui ha senso dire se è $\boxed{\textbf{VERA}}$ o $\boxed{\textbf{FALSA}}$

- $\mathcal{P} =$ "oggi piove"
- $\mathcal{Q} =$ "$2^{120} - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R} =$ "la miliardesima cifra nello sviluppo decimale di π è 5"
- $\mathcal{S} =$ "$2 \geq 0$"
- $\mathcal{M} =$ "Mourinho è un personaggio molto simpatico" ???????
  $\mathcal{M}$ non è un enunciato accettabile. . .
- dunque dobbiamo essere d'accordo su:

$$\begin{tikzcd} & V \\ \mathcal{P} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & F \end{tikzcd}$$

Logica

PREDICATI Un predicato è un'affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili

- $\mathcal{P}(x) =$ "il giorno x piove"

Di per sè nessuna delle espressioni scritte sopra ha senso se non si dichiara il valore di tutte le variabili coinvolte.

$$\mathcal{P}(x) \rightarrow ??$$

Se alla x si sostituisce un valore concreto allora si ottiene un enunciato sensato, di cui si può stabilire il valore di verità.

$$\mathcal{P}(\text{“oggi”}) = F, \quad \mathcal{P}(\text{“4 novembre 1966”}) = V$$

$$\mathcal{R}(1,3) = V, \quad \mathcal{R}(10^9, 5) = \text{non lo so ma o è vera o è falsa}$$

Logica

PREDICATI Un predicato è un'affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili

- $\mathcal{P}(x) =$ "il giorno x piove"
- $\mathcal{Q}(n) =$ "$2^n - 1$ è un numero pari"

Di per sè nessuna delle espressioni scritte sopra ha senso se non si dichiara il valore di tutte le variabili coinvolte.

$$\mathcal{P}(x) \rightarrow ??$$

Se alla x si sostituisce un valore concreto allora si ottiene un enunciato sensato, di cui si può stabilire il valore di verità.

$$\mathcal{P}(\text{"oggi"}) = F, \quad \mathcal{P}(\text{"4 novembre 1966"}) = V$$

$$\mathcal{R}(1,3) = V, \quad \mathcal{R}(10^9, 5) = \text{non lo so ma o è vera o è falsa}$$

Logica

PREDICATI Un predicato è un'affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili

- $\mathcal{P}(x) =$ "il giorno x piove"
- $\mathcal{Q}(n) =$ "$2^n - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R}(n, m) =$ "la n-esima cifra nello sviluppo decimale di π è m"

Di per sè nessuna delle espressioni scritte sopra ha senso se non si dichiara il valore di tutte le variabili coinvolte.

$$\mathcal{P}(x) \longrightarrow ??$$

Se alla x si sostituisce un valore concreto allora si ottiene un enunciato sensato, di cui si può stabilire il valore di verità.

$$\mathcal{P}(\text{"oggi"}) = F, \quad \mathcal{P}(\text{"4 novembre 1966"}) = V$$

$$\mathcal{R}(1, 3) = V, \quad \mathcal{R}(10^9, 5) = \text{non lo so ma o è vera o è falsa}$$

Logica

PREDICATI Un predicato è un'affermazione il cui valore di verità dipende da una o più variabili

- $\mathcal{P}(x) =$ "il giorno x piove"
- $\mathcal{Q}(n) =$ "$2^n - 1$ è un numero pari"
- $\mathcal{R}(n, m) =$ "la n-esima cifra nello sviluppo decimale di π è m"
- $\mathcal{S}(x, y) =$ "$x \geq y$"

Di per sè nessuna delle espressioni scritte sopra ha senso se non si dichiara il valore di tutte le variabili coinvolte.

$$\mathcal{P}(x) \longrightarrow ??$$

Se alla x si sostituisce un valore concreto allora si ottiene un enunciato sensato, di cui si può stabilire il valore di verità.

$$\mathcal{P}(\text{“oggi”}) = F, \quad \mathcal{P}(\text{“4 novembre 1966”}) = V$$

$$\mathcal{R}(1, 3) = V, \quad \mathcal{R}(10^9, 5) = \text{non lo so ma o è vera o è falsa}$$

Logica

Enunciati composti

Gli enunciati si possono combinare mediante i $\boxed{\textit{connettivi logici}}$:

$$\vee \qquad \wedge \qquad \tilde{}$$

letti rispettivamente *o*, *e*, *non*. Per esempio se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono enunciati si possono costruire:

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \quad (\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}), \qquad \mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \quad (\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}), \qquad \tilde{}\mathcal{P} \quad (\text{non } \mathcal{P})$$

("$\vee$" e "$\wedge$" sono operatori *binari*, "$\tilde{}$" è un operatore *unario*).

Tutto ciò che serve sapere per utilizzare i connettivi è quali sono i valori di verità degli enunciati composti a partire da $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$. Questi si possono riassumere mediante le $\boxed{\textit{TABELLE DI VERITÀ}}$.

Logica

Tabelle di verità

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\tilde{}\mathcal{P}$
V	F
F	V

ESEMPI

$$\text{“non è vero che “}\underbrace{\text{oggi piove}}_{\mathcal{P}}\text{ o }\underbrace{\text{due è un numero pari”}}_{\mathcal{Q}}\text{ ”}$$

$$\mathcal{P} \to F \qquad \mathcal{Q} \to V \qquad \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \to V \qquad \tilde{}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \to F$$

Attenzione all'ordine:

$$\mathcal{P} \to F \qquad \tilde{}\mathcal{P} \to V \qquad \mathcal{Q} \to V \qquad (\tilde{}\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \to V$$

che equivale a

“oggi non piove” o “due è un numero pari”

Logica

Leggi di De Morgan

Valgono i fatti seguenti

$$\boxed{\text{\textasciitilde}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \qquad \text{è lo stesso di} \qquad (\text{\textasciitilde}\mathcal{P}) \wedge (\text{\textasciitilde}\mathcal{Q})}$$

e (simmetricamente)

$$\boxed{\text{\textasciitilde}(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \qquad \text{è lo stesso di} \qquad (\text{\textasciitilde}\mathcal{P}) \vee (\text{\textasciitilde}\mathcal{Q})}$$

Per convincersene basta scrivere le tabelle di verità dei vari enunciati composti; per esempio nel primo caso:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	˜$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

e

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	˜$\mathcal{P}$	˜$\mathcal{Q}$	(˜$\mathcal{P}$) $\wedge$ (˜$\mathcal{Q}$)
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Logica

Implicazione materiale

È utile introdurre il connettivo di *implicazione* "$\rightarrow$" descritto dalla seguente tabella di verità:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- In effetti l'implicazione si potrebbe esprimere in termini dei connettivi precedenti:

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \qquad \text{è lo stesso di} \qquad (\tilde{}\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$$

(basta confrontare le tabelle di verità)

Logica

Implicazione materiale

È utile introdurre il connettivo di *implicazione* "$\rightarrow$" descritto dalla seguente tabella di verità:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- In effetti l'implicazione si potrebbe esprimere in termini dei connettivi precedenti:

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \qquad \text{è lo stesso di} \qquad (\tilde{}\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}$$

(basta confrontare le tabelle di verità)

- La negazione dell'implicazione si trova immediatamente da quanto detto sopra e dalle leggi di De Morgan:

$$\tilde{}(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \tilde{}(\tilde{}\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Leftrightarrow \tilde{}\tilde{}\mathcal{P} \wedge \tilde{}\mathcal{Q} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P} \wedge \tilde{}\mathcal{Q}}$$

Logica

Considerazioni sull' implicazione

- Se $\mathcal{P}$ (l'ipotesi) è falsa l'implicazione è **comunque vera** (indipendentemente dal valore di verità di $\mathcal{Q}$ (la tesi). Per esempio

  $$\text{“due è un numero dispari”} \rightarrow \text{“oggi piove”}$$

  è un enunciato VERO. Ciò può apparire sorprendente, ma questa scelta si rivelerà la più comoda.

Logica

Considerazioni sull' implicazione

- Se $\mathcal{P}$ (l'ipotesi) è falsa l'implicazione è **comunque vera** (indipendentemente dal valore di verità di $\mathcal{Q}$ (la tesi). Per esempio

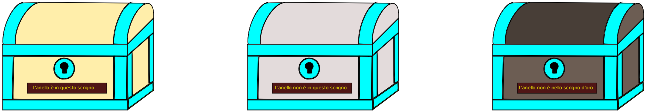
  $$\text{"due è un numero dispari"} \rightarrow \text{"oggi piove"}$$

  è un enunciato VERO. Ciò può apparire sorprendente, ma questa scelta si rivelerà la più comoda.
- La validità dell'implicazione $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ **non dice nulla** sulla validità delle singole $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.
  L'implicazione vuole esprimere la *possibilità di passare* da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$. La cosa si capirà meglio a livello dei predicati; infatti scrivendo

  $$\mathcal{P}(x) \rightarrow \mathcal{Q}(x)$$

  esprimeremo il fatto che le x che rendono vera $\mathcal{P}(x)$ **necessariamente** rendono vera $\mathcal{Q}(x)$, mentre **non si può dire nulla** su $\mathcal{Q}(x)$ per le x che rendono falsa $\mathcal{P}(x)$.

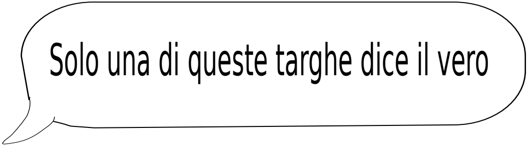
Un piccolo rompicapo [2]

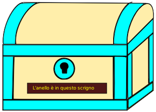


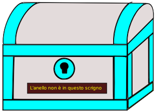
L'anello è in questo scrigno	L'anello non è in questo scrigno	L'anello non è nello scrigno d'oro

[2] preso da **Raymond Smullyan**, *Qual è il titolo di questo libro*

Variazioni sul tema







L'anello non è in questo scrigno	Se l'anello non è in questo scrigno, allora lo scrigno d'oro dice il vero	Se l'anello è in questo scrigno, allora lo scrigno d'oro dice il vero

Logica

Predicati

Come già detto un predicato $\mathcal{P}(x)$ (o di può variabili) non ha un valore di verità fino a quando non si sostituiscono tutte le sue variabili con dei valori espliciti.

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}n \text{ è pari”}$$
$$\mathcal{Q}(n,m) = \text{“}n = 2m\text{”}$$

$$\mathcal{P}(n) \to ?? \qquad \mathcal{Q}(n,m) \to ?? \qquad (\text{dipende da chi sono } n \text{ e } m!!)$$

mentre

$$\mathcal{P}(2) \to V, \qquad \mathcal{P}(77) \to F, \qquad \mathcal{Q}(1,1) \to F, \quad \mathcal{Q}(6,3) \to V.$$

Un predicato diventa un enunciato quando tutte le sue variabili sono sostituite da delle costanti: *si dice allora che le variabili sono* **saturate**

Logica

Predicati e connettivi

I predicati si possono combinare mediante i connettivi formando predicati più complessi in vario modo:

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$$
$$\mathcal{S}(x, y) = \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(y)$$
$$\mathcal{T}(x, y) = \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{S}(x, y)$$
$$\mathcal{U}(x, y, z) = \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{S}(y, z)$$

eccetera...

Logica

Quantificatori

C'è un altro modo di saturare una variabile in un predicato. Per esempio supponiamo che

$$\mathcal{P}(x) = \text{“piove nel luogo } x\text{”}$$

e consideriamo

$$\mathcal{Q} = \text{“piove ovunque”}$$

è chiaro che $\mathcal{Q}$ non contiene variabili e quindi è un enunciato (che posso provare a verificare guardando il bollettino metereologico mondiale...). $\mathcal{Q}$ sarà vero se e solo se il predicato $\mathcal{P}(x)$ è vero per ogni x ammissibile, Scriveremo:

$$\mathcal{Q} = \forall x\, \mathcal{P}(x) \qquad \text{(da leggersi “per ogni } x\ \mathcal{P}(x)\text{”)}$$

Il simbolo $\forall$ si chiama **quantificatore universale**

Logica

Quantificatori

In maniera analoga si considera il **quantificatore esistenziale** $\exists$ che permette di scrivere:

$$\mathcal{R} = \exists x : \mathcal{P}(x) \qquad \text{(da leggersi ``esiste } x \text{ tale che } \mathcal{P}(x)\text{'')}$$

(il doppio punto corrisponde a "tale che"). L'enunciato $\mathcal{R}$ sarà verificato se c'è almeno una x in cui $\mathcal{P}(x)$ risulta vero.
Nell'esempio di prima $\mathcal{R}$ significa:

$$\mathcal{R} = \text{``c'è un luogo in cui piove''}$$

che ovviamente può essere vero o falso a seconda sempre della situazione metereologica planetaria.

Logica

Variabili mute

- Nelle formule
$$\forall x\, \mathcal{P}(x), \qquad \exists x : \mathcal{P}(x)$$
la variabile x gioca un **ruolo puramente formale** (serve a esprimere chi è il predicato $\mathcal{P}(x)$): le scritture sopra non dipendono da x (in effetti sono degli enunciati). Sarebbe lo stesso usare un'alta variabile per esprimere lo stesso enunciato:
$$\forall y\, \mathcal{P}(y), \qquad \exists z : \mathcal{P}(z)$$
dicono esattamente la stessa cosa di prima.
Si dice in questi casi che x (o y/z) è una **variabile muta**.

Logica

Combinazioni di quantificatori

Se si parte da predicati di più variabili, per esempio se

$$\mathcal{P}(x, y) = \text{“piove nel luogo } x \text{ all'ora } y\text{”},$$

si possono combinare variamente quantificatori e costanti:

- $\forall y \, \mathcal{P}(\text{“Pisa”}, y) \rightarrow$ “a Pisa piove sempre”

Logica

Combinazioni di quantificatori

Se si parte da predicati di più variabili, per esempio se

$$\mathcal{P}(x, y) = \text{“piove nel luogo } x \text{ all'ora } y\text{”},$$

si possono combinare variamente quantificatori e costanti:

- $\forall y\, \mathcal{P}(\text{“Pisa”}, y) \rightarrow$ “a Pisa piove sempre”
- $\exists y : \mathcal{P}(\text{“Valle della Morte”}, y) \rightarrow$ “talvolta volta piove nella Valle della Morte”

Logica

Combinazioni di quantificatori

Se si parte da predicati di più variabili, per esempio se

$$\mathcal{P}(x, y) = \text{“piove nel luogo } x \text{ all'ora } y\text{”},$$

si possono combinare variamente quantificatori e costanti:

- $\forall y\, \mathcal{P}(\text{“Pisa”}, y) \to$ “a Pisa piove sempre”
- $\exists y : \mathcal{P}(\text{“Valle della Morte”}, y) \to$ “talvolta volta piove nella Valle della Morte”
- $\exists y : \mathcal{P}(x, \text{“ieri”}) \to$ “da qualche parte ieri pioveva”

Logica

Combinazioni di quantificatori

Se si parte da predicati di più variabili, per esempio se

$$\mathcal{P}(x, y) = \text{“piove nel luogo } x \text{ all'ora } y\text{”},$$

si possono combinare variamente quantificatori e costanti:

- $\forall y \, \mathcal{P}(\text{“Pisa”}, y) \to$ “a Pisa piove sempre”
- $\exists y : \mathcal{P}(\text{“Valle della Morte”}, y) \to$
  “talvolta volta piove nella Valle della Morte”
- $\exists y : \mathcal{P}(x, \text{“ieri”}) \to$ “da qualche parte ieri pioveva”
- $\forall x \, \mathcal{P}(x, \text{“oggi”}) \to$ “oggi c'è il Diluvio Universale”

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ “piove sempre ovunque”

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ “piove sempre ovunque”
- $\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ “ovunque si vada c’è una volta che piove”
- $\forall y \, \exists x : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ “in ogni momento piove da qualche parte”

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\forall y\, \exists x : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "in ogni momento piove da qualche parte"
- $\exists x : (\forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "da qualche parte piove sempre"

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \to$ "piove sempre ovunque"
- $\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \to$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\forall y \, \exists x : \mathcal{P}(x, y) \to$ "in ogni momento piove da qualche parte"
- $\exists x : (\forall y \, \mathcal{P}(x, y)) \to$ "da qualche parte piove sempre"
- $\exists y : (\forall x \, \mathcal{P}(x, y)) \to$ "prima o poi verrà il Diluvio Universale"

Combinazioni di quantificatori

Si possono combinare anche i quantificatori tra loro:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\forall y \, \exists x : \mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "in ogni momento piove da qualche parte"
- $\exists x : (\forall y \, \mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "da qualche parte piove sempre"
- $\exists y : (\forall x \, \mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "prima o poi verrà il Diluvio Universale"
- $\exists x : \exists y : \mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "da qualche parte talvolta piove"

Tutti gli enunciati scritti sopra sono **diversi**.

Negazione dei quantificatori

Riprendiamo per esempio

$$\mathcal{P}(x) = \text{“piove nel luogo } x\text{”}$$

e l'enunciato

$$\mathcal{Q} = \forall x\, \mathcal{P}(x) \qquad \text{(piove dappertutto)}$$

Qual è la sua negazione?
Non dovrebbe essere difficile riconoscere che

$$\tilde{}\mathcal{Q} = \tilde{}(\forall x\, \mathcal{P}(x)) = \text{“da qualche parte non piove”} = \boxed{\exists x : \tilde{}P(x)}$$

Analogamente:

$$\tilde{}(\exists x : \mathcal{P}(x)) = \boxed{\forall x\, \tilde{}\mathcal{P}(x)}$$

(il contrario di “da qualche parte piove” è “non piove in nessun luogo”).
Dunque negando una proposizione quantificata i **quantificatori si invertono**.

Negazione di due quantificatori consecutivi

Applicando la regola precedente:

- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\exists y : \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$

Negazione di due quantificatori consecutivi

Applicando la regola precedente:

- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\exists y : \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$
- $\tilde{}(\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x,y))) = \forall x\, \tilde{}(\exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \forall x\, \forall y\, \tilde{}\mathcal{P}(x,y)$

Negazione di due quantificatori consecutivi

Applicando la regola precedente:

- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\exists y : \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$
- $\tilde{}(\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x,y))) = \forall x\, \tilde{}(\exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \forall x\, \forall y\, \tilde{}\mathcal{P}(x,y)$
- $\tilde{}(\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\forall y\, \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$

Negazione di due quantificatori consecutivi

Applicando la regola precedente:

- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\exists y : \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$
- $\tilde{}(\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x,y))) = \forall x\, \tilde{}(\exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \forall x\, \forall y\, \tilde{}\mathcal{P}(x,y)$
- $\tilde{}(\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : \tilde{}(\exists y : \mathcal{P}(x,y)) = \exists x : (\forall y\, \tilde{}\mathcal{P}(x,y))$
- $\tilde{}(\exists x : (\forall y\, \mathcal{P}(x,y))) = \forall x\, \tilde{}(\forall y\, \mathcal{P}(x,y)) = \forall x\, \exists y : \tilde{}\mathcal{P}(x,y)$

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \to$ "piove sempre ovunque"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \longrightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \longrightarrow$ "da qualche parte a volte non piove"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "da qualche parte a volte non piove"

- $\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \longrightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \longrightarrow$ "da qualche parte a volte non piove"

- $\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \longrightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\tilde{}(\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y)) \longrightarrow$ "c'è un posto in cui non piove mai"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ “piove nel luogo x all’ora y”, allora:

- $\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y) \to$ “piove sempre ovunque”
- $\tilde{}(\forall x \, \forall y \, \mathcal{P}(x, y)) \to$ “da qualche parte a volte non piove”

- $\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \to$ “ovunque si vada c’è una volta che piove”
- $\tilde{}(\forall x \, \exists y : \mathcal{P}(x, y)) \to$ “c’è un posto in cui non piove mai”

- $\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x, y)) \to$ “da qualche parte piove sempre”

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \to$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \to$ "da qualche parte a volte non piove"

- $\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \to$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\tilde{}(\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y)) \to$ "c'è un posto in cui non piove mai"

- $\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x, y)) \to$ "da qualche parte piove sempre"
- $\tilde{}(\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x, y))) \to$ "in ogni luogo talvolta non piove"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x,y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

- $\forall x\,\forall y\,\mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\,\forall y\,\mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "da qualche parte a volte non piove"

- $\forall x\,\exists y : \mathcal{P}(x,y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\tilde{}(\forall x\,\exists y : \mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "c'è un posto in cui non piove mai"

- $\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "da qualche parte piove sempre"
- $\tilde{}(\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x,y))) \rightarrow$ "in ogni luogo talvolta non piove"

- $\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x,y)) \rightarrow$ "da qualche parte talvolta piove"

Negazione di quantificatori consecutivi

ESEMPIO: $\mathcal{P}(x, y) =$ "piove nel luogo x all'ora y", allora:

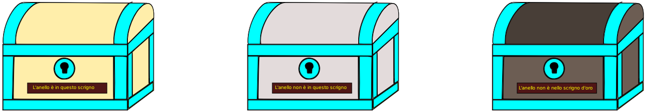
- $\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "piove sempre ovunque"
- $\tilde{}(\forall x\, \forall y\, \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "da qualche parte a volte non piove"

- $\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y) \rightarrow$ "ovunque si vada c'è una volta che piove"
- $\tilde{}(\forall x\, \exists y : \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "c'è un posto in cui non piove mai"

- $\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "da qualche parte piove sempre"
- $\tilde{}(\exists x : (\forall y : \mathcal{P}(x, y))) \rightarrow$ "in ogni luogo talvolta non piove"

- $\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x, y)) \rightarrow$ "da qualche parte talvolta piove"
- $\tilde{}(\exists x : (\exists y : \mathcal{P}(x, y))) \rightarrow$ "non piove mai, da nessuna parte"

Ancora lei . . .



L'anello non è in questo scrigno	Tutte le targhe dicono il vero	C'è una targa che dice il falso

Quesito logico finale

SECONDO I DETTAMI DEL CATTOLICESIMO
PUÒ UN UOMO SPOSARE LA SORELLA DELLA SUA VEDOVA
???

FORSE SÌ, MA DEVE ESSERE MORTA PURE LEI!!

Elementi di teoria degli insiemi

Consideriamo concetti primitivi le nozioni di **insieme** e di **elemento**

Intuitivamente pensiamo ad un insieme come una collezione di oggetti (i suoi elementi) - tipicamente gli elementi saranno accomunati da una qualche proprietà,

Conoscere un insieme significa conoscere esattamente tutti i suoi elementi

più precisamente conoscere un insieme A significa che, dato un qualunque oggetto a (in un certo universo prefissato) siamo in grado di dire se a è oppure non è elemento di A.

Nel primo caso scriveremo

$$a \in A \qquad a \textbf{ appartiene } \text{ad } A$$

Nel secondo

$$a \notin A \qquad a \textbf{ non appartiene } \text{ad } A$$

Relazioni tra insiemi

Due insiemi sono **eguali** quando hanno esattamente gli stessi elementi:

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x(x \in B \rightarrow x \in A))$$

Un insieme A è **contenuto** in un sottoinsieme B, oppure A è un **sottoinsieme** di B, se tutti gli elementi di A sono anche elementi di B

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x(x \in A \rightarrow x \in B))$$

Risulta chiaro che

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

La relazione "$\subset$" è un'inclusione *debole*.

Modi di definire un insieme

Ci sono due modi per introdurre un insieme

- per **enumerazione**: elencando esplicitamente i suoi elementi tra due parentesi graffe:

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B := \{\text{Mercurio}, \text{Venere}, \text{Marte}, \text{Giove}, \text{Saturno}, \text{Urano}, \text{Nettuno}, \text{Plutone}\}$$

Il primo metodo funziona **solo per insiemi finiti**. Negli altri casi non abbiamo alternative:

$$P := \{\text{numeri interi pari}\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$$

Notiamo che non c'è nessuna nozione di ordine tra gli elementi di un insieme: $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$

Modi di definire un insieme

Ci sono due modi per introdurre un insieme

- per **enumerazione**: elencando esplicitamente i suoi elementi tra due parentesi graffe:

$$A := \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$B := \{\text{Mercurio}, \text{Venere}, \text{Marte}, \text{Giove}, \text{Saturno}, \text{Urano}, \text{Nettuno}, \text{Plutone}\}$$

- **mediante una proprietà**: che individui esattamente gli elementi dell'insieme:

$$A := \{\text{"numeri interi tra uno e cinque"}\},$$

$$B := \{\text{"pianeti del sistema solare eccetto la Terra"}\}$$

Il primo metodo funziona **solo per insiemi finiti**. Negli altri casi non abbiamo alternative:

$$P := \{\text{numeri interi pari}\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è pari}\}$$

Notiamo che non c'è nessuna nozione di ordine tra gli elementi di un insieme: $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$

Modi di definire un insieme

In generale se $\mathcal{P}(x)$ è un predicato , allora

$$A := \{x : \mathcal{P}(x)\}$$

definisce l'insieme di tutti e soli gli elementi che rendono vero il predicato $\mathcal{P}(x)$ (che verificano la proprietà $\mathcal{P}(x)$). Si conviene di considerare l'insieme che non ha nessun elemento (o anche l'insieme la cui proprietà caratteristica è sempre falsa). Tale insieme è unico (se ce ne fossero due dovrebbero differire per qualche elemento – ma nessuno dei due ha elementi!!) e si chiama insieme vuoto, denotato con $\emptyset$.
CONVENZIONE: Useremo spesso le seguenti abbreviazioni:

$$\begin{array}{lll}
\forall x \in A\ \mathcal{P}(x) & \text{intendendo} & \forall x\ (x \in A) \to \mathcal{P}(x) \\
\exists x \in A : \mathcal{P}(x) & \text{intendendo} & \exists x : (x \in A) \wedge \mathcal{P}(x) \\
\{x \in A : \mathcal{P}(x)\} & \text{intendendo} & \{x : (x \in A) \wedge \mathcal{P}(x)\}
\end{array}$$

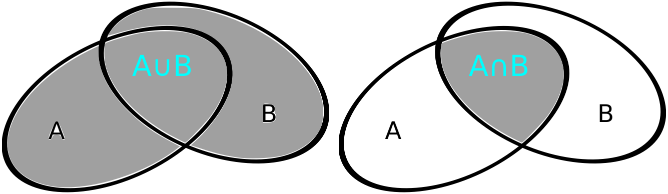
Unione e intesezione tra insiemi

Dati due insiemi A e B si definiscono

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\} \qquad A \textbf{ unito } B$$

e

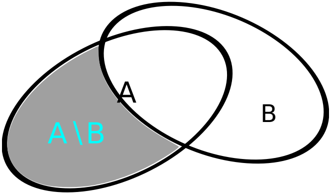
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\} \qquad A \textbf{ intersecato } B$$

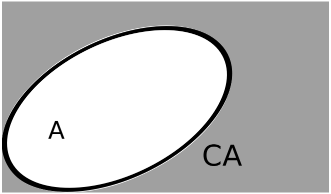


Differenza e complementare

Si definisce anche

$$A \setminus B = \{x : (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \qquad A \textbf{ meno } B$$





Se U è l'ambiente (o l'*universo*) in cui variano gli oggetti che consideriamo possiamo anche considerare il **complementare** di un insieme A:

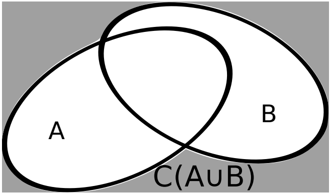
$$\mathcal{C}A := U \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

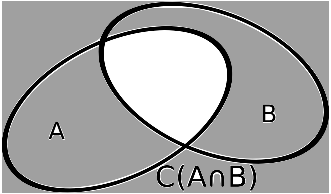
Utilizzando il complementare si ha

$$A \setminus B = A \cap \mathcal{C}B$$

Inoltre vale l'analogo delle leggi di De Morgan:

$$\mathcal{C}(A \cup B) = (\mathcal{C}A) \cap (\mathcal{C}B) \qquad \mathcal{C}(A \cap B) = (\mathcal{C}A) \cup (\mathcal{C}B)$$



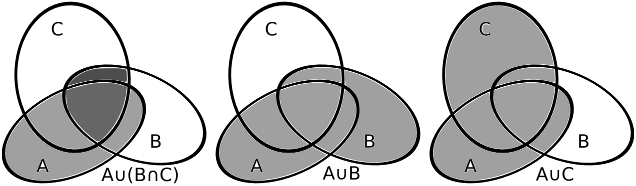


Notiamo che c'è un perfetto parallelismo tra insiemi e proprietà, dato che ogni proprietà $\mathcal{P}(x)$ individua l'insieme $A := \{x : \mathcal{P}(x)\}$ e viceversa ogni insieme A individua la proprietà $\mathcal{P}(x) =$ "$x \in A$".

Proprietà varie

Con un po' di pazienza si può verificare che valgono:

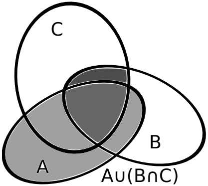
- $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$



Proprietà varie

Con un po' di pazienza si può verificare che valgono:

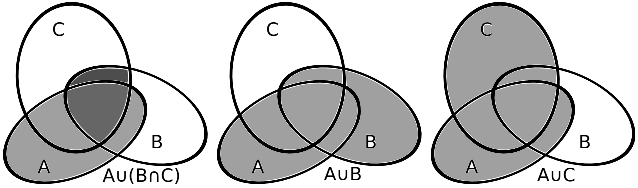
- $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$
- proprietà associativa per $\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$



Proprietà varie

Con un po' di pazienza si può verificare che valgono:

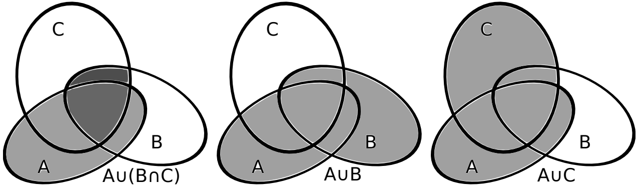
- $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$
- proprietà associativa per $\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- proprietà associativa per $\cap$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$



Proprietà varie

Con un po' di pazienza si può verificare che valgono:

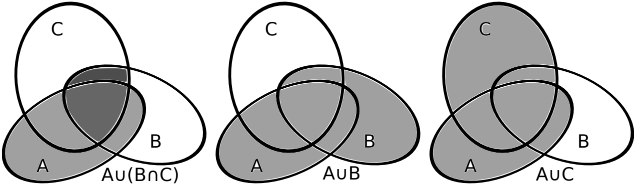
- $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$
- proprietà associativa per $\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- proprietà associativa per $\cap$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- proprietà distributiva tra $\cup$ e $\cap$:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$



Proprietà varie

Con un po' di pazienza si può verificare che valgono:

- $\mathcal{C}\mathcal{C}A = A$
- proprietà associativa per $\cup$: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- proprietà associativa per $\cap$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- proprietà distributiva tra $\cup$ e $\cap$:
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- proprietà distributiva tra $\cap$ e $\cup$:
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$



Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) =$

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup \mathcal{C}\mathcal{C}C) =$ (De Morgan)

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup \mathcal{C}\mathcal{C}C) =$ (De Morgan)
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup C) =$

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup \mathcal{C}\mathcal{C}C) =$ (De Morgan)
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup C) =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cup (A \cap C) =$ (proprietà distributiva)

Un problemino

Dati tre insiemi A, B e C, caratterizzare

$$A \setminus (B \setminus C) \qquad \text{e} \qquad (A \setminus B) \setminus C$$

- $A \setminus (B \setminus C) =$
- $A \setminus (B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap \mathcal{C}(B \cap \mathcal{C}C) =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup \mathcal{C}\mathcal{C}C) =$ (De Morgan)
- $A \cap (\mathcal{C}B \cup C) =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cup (A \cap C) =$ (proprietà distributiva)
- $(A \setminus B) \cup (A \cap C)$

Analogamente

- $(A \setminus B) \setminus C =$

Analogamente

- $(A \setminus B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \setminus C =$

Analogamente

- $(A \setminus B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cap \mathcal{C}C =$

Analogamente

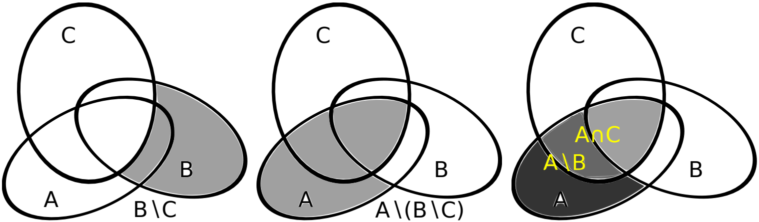
- $(A \setminus B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cap \mathcal{C}C =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C =$ (proprietà associativa)

Analogamente

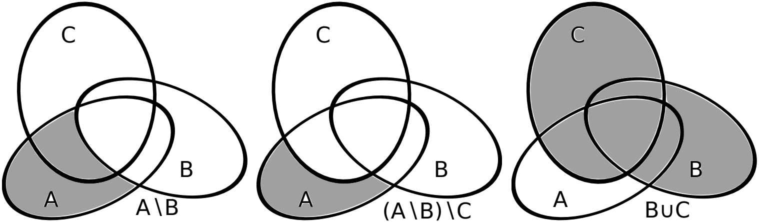
- $(A \setminus B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cap \mathcal{C}C =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C =$ (proprietà associativa)
- $A \cap \mathcal{C}(B \cup C) =$ (De Morgan)

Analogamente

- $(A \setminus B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \setminus C =$
- $(A \cap \mathcal{C}B) \cap \mathcal{C}C =$
- $A \cap (\mathcal{C}B \cap \mathcal{C}C =$ (proprietà associativa)
- $A \cap \mathcal{C}(B \cup C) =$ (De Morgan)
- $A \setminus (B \cup C)$



$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$



$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$$

Funzioni

Dati due insiemi A e B chiamiamo **funzione** da A in B una qualunque "legge" cha a ogni elemento di A fa corrispondere uno (e uno solo). elemento di B. Se indichiamo con f la funzione esprimeremo quanto appena detto scrivendo:

$$f : A \to B \qquad (f \text{ è una funzione che manda } A \text{ in } B)$$

A si chiama **dominio** di f, B si chiama **codominio** di f

Dato a in A indichiamo allora con $\boxed{f(a)}$ quell'unico elemento in B che corrisponde ad a tramite f:

$a \in A$ è l'**argomento** in cui si calcola f
$f(a) \in B$ è il **valore** di f in a o anche l'**immagine** di a tramite f.

NOTA: La dichiarazione del dominio e del codominio è parte integrante della dichiarazione della funzione (solo così hanno senso le nozioni che introduciamo tra poco).

ATTENZIONE: si dice spesso “la funzione $f(x)$”; questo è un piccolo abuso di linguaggio (tollerabile. . .).

Si dovrebbe dire “la funzione f”, visto che $f(x)$ è un elemento del codominio e non la funzione. Quindi non “la funzione x^2, bensì ”la funzione $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $q(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per esempio se si dice “la funzione x^a” di solito si intende la funzione *potenza di esponente a*, cioè la funzione p_a definita da $p_a(x) = x^a$ (per abitudine che $x \to$ variabile, mentre $a \to$ costante generica. Si potrebbe però considerare x fissato e a variabile. Avremmo allora la funzione *esponenziale di base x* (purchè $x > 0$), cioè la funzione $\exp_x$ definita da $\exp_x(a) = x^a$.
Una notazione che si usa a volte è $x \mapsto f(x)$. Allora:

$$x \mapsto x^a \qquad \text{(potenza di esponente } a\text{)}$$

$$a \mapsto x^a \qquad \text{(esponenziale di base } x\text{)}$$

NOTA in queste scritture x/a sono **variabili mute**.

Grafico

Dati A e B chiamiamo **prodotto cartesiano** tra A e B l'insieme delle *coppie ordinate* aventi come primo termine un elemento di A e come secondo termine un elemento di B:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, \ b \in B\}$$

Per es. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ si può interpretare come il *piano cartesiano*. Allora se $f : A \to B$ risulta definito il **grafico** di f, come il sottoinsieme di $A \times B$ definito da:

$$\{(a, f(a)) : a \in A\} = \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}$$

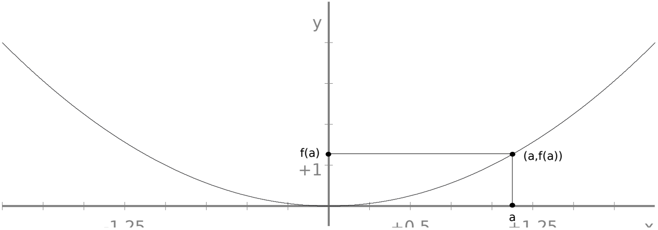
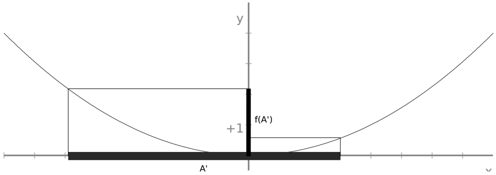


Immagine di f

Sia $f : A \to B$.
Preso $A' \subset A$ si definisce l'**immagine** di A' tramite f:

$$f(A') := \{b \in B : (\exists a \in A : f(a) = b)\}$$

Nel caso $A' = A$ si dice che $f(A)$ è l'**immagine di** f



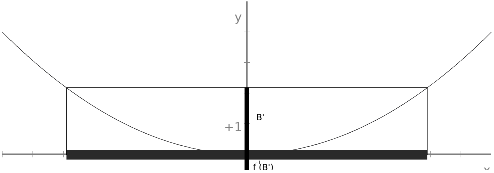
Se l'immagine di A coincide con B: $\boxed{f(A) = B}$, cioè se ogni punto del codominio proviene da qualche punto del dominio, allora f si dice **surgettiva**.

Controimmagine di f

Preso $B' \subset A$ si definisce la **controimmagine** di B' tramite f:

$$f^{-1}(B') := \{a \in A : f(a) \in B'\}$$

Notiamo che per ora non stiamo definendo una funzione f^{-1}.



$$f(f^{-1}(B')) \subset B' \quad \text{e in generale } f(f^{-1}(B')) \neq B'$$

(vale l'eguagianza solo se f è surgettiva).

$$A' \subset f^{-1}(f(A')) \quad \text{e in generale } A' \neq f^{-1}(f(A'))$$

Vale l'eguaglianza solo se f è **iniettiva** cioè se:

$$\forall a, a' \in A (a \neq a') \rightarrow (f(a) \neq f(a'))$$

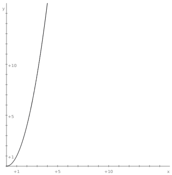
(f manda *punti distinti in valori distinti*).

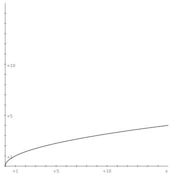
Funzione inversa

Se f è iniettiva e surgettiva, allora si dice che è **bigettiva** o anche che è **invertibile**.
In tal caso risulta definita la funzione **inversa** $f^{-1} : B \to A$, mediante la relazione:

$$f^{-1}(b) = \text{ quell'unico } a \text{ in } A \text{ tale che } f(a) = b \qquad \forall b \in B$$

ATTENZIONE: nel caso di funzioni a valori reali si rischia di confondere la funzione inversa f^{-1} con il reciproco di f (che è tutta un'alra funzione $\sqrt{x} \neq \frac{1}{x^2}$). Quindi per indicare il reciproco cercheremo di usare la notazione $\frac{1}{f}$.





Il grafico di f^{-1} si ottiene scambiando gli assi coordinati.

Composizione

Dati tre insiemi A, B e C; date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ risulta definita una terza funzione $h : A \to C$ definita da

$$h(a) = g(f(a)) \qquad \forall a \in A$$

Tale funzione si indica con $g \circ f$ e si chiama **composizione** di g con f. Quindi $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Notiamo che per calcolare $g \circ f$ si applica prima f e poi g.

ESEMPIO: Se $A = B = C = \mathbb{R}$ e se $f(x) = x^2$ $g(x) = x + 1$, allora

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

mentre

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

NUMERI REALI

Indichiamo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei **numeri reali**. Non diremo cosa sono (o come si potrebbero costruire a partire per esempio dai numeri interi). Faremo invece una presentazione **assiomatica**, mettendo in evidenza che proprietà hanno e cosa possiamo fare con loro.
Da questo punto di vista i reali costituiscono un
corpo ordinato e completo:

corpo $\rightarrow$ sono definite le **operazioni** $+$ e $\cdot$
ordinato $\rightarrow$ è definita la **relazione d'ordine** $\geq$
completo $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ "non ha buchi" (da precisare dopo)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

c+) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

c+) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

a+) $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$(**pr. associativa** per $+$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$(**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x,y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x,y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$(**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

$c\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $\cdot$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

c+) $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

a+) $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$(**pr. associativa** per $+$)

n+) $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

i+) $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

c·) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $\cdot$)

a·) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $\cdot$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x,y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x,y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$(**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

$c\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $\cdot$)

$a\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $\cdot$)

$n\cdot)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \neq 0$ e $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $\cdot$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

$c\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $\cdot$)

$a\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $\cdot$)

$n\cdot)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \neq 0$ e $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $\cdot$)

$i\cdot)$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ (**inverso** per $\cdot$)

Struttura di corpo

Sono definite due operazioni $s(x, y) = x + y$ (la **somma**) e $p(x, y) = x \cdot y = xy$ (il **prodotto**) che hanno le seguenti proprietà:

$c+)$ $a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $+$)

$a+)$ $(a + b) + c = a + (b + c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $+$)

$n+)$ $\exists 0 \in \mathbb{R}$ tale che $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $+$)

$i+)$ $\forall a \in \mathbb{R} \exists (-a) \in \mathbb{R}$ tale che $a + (-a) = 0$ (**inverso** per $+$)

$c\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ (**pr.commutativa** per $\cdot$)

$a\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. associativa** per $\cdot$)

$n\cdot)$ $\exists 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \neq 0$ e $a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ (**el. neutro** per $\cdot$)

$i\cdot)$ $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot a^{-1} = 1$ (**inverso** per $\cdot$)

$d + \cdot)$ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (**pr. distributiva**)

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI

- L'elemento neutro 0 è unico.
  Supponiamo che esista un altro elemento neutro $0'$; allora $0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$.

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI

- L'elemento neutro 0 è unico.
  Supponiamo che esista un altro elemento neutro $0'$; allora
  $0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$.
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$.
  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
  sommando $-(a \cdot 0)$ a entrambi i lati:
  $a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0) \Leftrightarrow 0 = a \cdot 0$.

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI

- L'elemento neutro 0 è unico.
  Supponiamo che esista un altro elemento neutro $0'$; allora
  $0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$.
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0.$
  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
  sommando $-(a \cdot 0)$ a entrambi i lati:
  $a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0) \Leftrightarrow 0 = a \cdot 0.$
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$ (**annullamento del prodotto**).
  Siano a e b per cui $a \cdot b = 0$, ma $(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$.
  Allora a e b ammettono inverso a^{-1} e b^{-1}.
  Moltiplicando per $b^{-1} \cdot a^{-1}$:
  $b^{-1} \cdot a^{-1} a \cdot b = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow b^{-1} \cdot a^{-1} a \cdot b = 0$
  $\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ ASSURDO

Gli assiomi appena scritti permettono di ricavare tutte le proprietà *algebriche* dei reali. ALCUNI ESEMPI

- L'elemento neutro 0 è unico.
  Supponiamo che esista un altro elemento neutro $0'$; allora
  $0 = 0 + 0' = 0' \Rightarrow 0 = 0'$.
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 0 = 0$.
  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
  sommando $-(a \cdot 0)$ a entrambi i lati:
  $a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0) \Leftrightarrow 0 = a \cdot 0$.
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$ (**annullamento del prodotto**).
  Siano a e b per cui $a \cdot b = 0$, ma $(a \neq 0) \wedge (b \neq 0)$.
  Allora a e b ammettono inverso a^{-1} e b^{-1}.
  Moltiplicando per $b^{-1} \cdot a^{-1}$:
  $b^{-1} \cdot a^{-1} a \cdot b = b^{-1} \cdot a^{-1} \cdot 0 \Leftrightarrow b^{-1} \cdot a^{-1} a \cdot b = 0$
  $\Leftrightarrow b^{-1} \cdot b = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$ ASSURDO
- e si potrebbe andare avanti...

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathcal{R}(x, y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathcal{R}(x, y) = (x \geq y)$ è vera)
Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $\ a \geq a \ \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.
Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{}(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathcal{R}(x, y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathcal{R}(x, y) = (x \geq y)$ è vera)
Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $a \geq a \; \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

$(a \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq a) \rightarrow (a = b) \; \forall a, b \in \mathbb{R}$ (pr. **antisimmetrica**)

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.
Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{}(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathcal{R}(x, y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathcal{R}(x, y) = (x \geq y)$ è vera)

Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $a \geq a \; \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

$(a \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq a) \rightarrow (a = b) \; \forall a, b \in \mathbb{R}$ (pr. **antisimmetrica**)

$(t \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \rightarrow (a \geq c) \; \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (pr. **transitiva**)

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.

Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{}(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathcal{R}(x, y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathcal{R}(x, y) = (x \geq y)$ è vera)
Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $a \geq a \; \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

$(a \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq a) \rightarrow (a = b) \; \forall a, b \in \mathbb{R}$ (pr. **antisimmetrica**)

$(t \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \rightarrow (a \geq c) \; \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (pr. **transitiva**)

$(+ \geq)$ $(a \geq b) \rightarrow (a + c \geq b + c) \; \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.
Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{}(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Struttura d'ordine

In $\mathbb{R}$ è definita una relazione binaria, cioè un predicato a due variabili $\mathcal{R}(x, y)$, che su scrive di solito $x \geq y$ (e si legge x è *maggiore o eguale* a y, quando $\mathcal{R}(x, y) = (x \geq y)$ è vera)

Tale relazione verifica:

$(r \geq)$ $a \geq a \ \forall a \in \mathbb{R}$ (pr. **riflessiva**)

$(a \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq a) \to (a = b) \ \forall a, b \in \mathbb{R}$ (pr. **antisimmetrica**)

$(t \geq)$ $(a \geq b) \wedge (b \geq c) \to (a \geq c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (pr. **transitiva**)

$(+ \geq)$ $(a \geq b) \to (a + c \geq b + c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$(\cdot \geq)$ $(a \geq b) \wedge (c \geq 0) \to (a \cdot c \geq b \cdot c) \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Una relazione $x \geq y$ avente le prime tre proprietà sopra si dice **relazione d'ordine** (totale in quanto è definita per tutte le possibili coppie x, y in $\mathbb{R}$). Le altre due proprietà stabiliscono che la relazione d'ordine *va d'accordo* con la somma e li prodotto.

Si definiscono poi:

$$(x > y) := (x \geq y) \wedge (x \neq y)$$

$$(x \leq y) := \tilde{\ }(x > y) \qquad (x < y) := (x \leq y) \wedge (x \neq y)$$

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

- $(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)$
  (vediamo $\rightarrow$) Se non fosse $a \leq 0$ allora sarebbe $a > 0$, cioè $(a \geq 0) \wedge (a \neq 0)$.
  Ma da $(0 \geq a)$ e $(a \geq 0)$ si ottiene $a = 0$, che contrasta con $a \neq 0$, ASSURDO. Tralasciamo la $\leftarrow$.

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

- $(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)$
  (vediamo $\rightarrow$) Se non fosse $a \leq 0$ allora sarebbe $a > 0$, cioè $(a \geq 0) \wedge (a \neq 0)$.
  Ma da $(0 \geq a)$ e $(a \geq 0)$ si ottiene $a = 0$, che contrasta con $a \neq 0$, ASSURDO. Tralasciamo la $\leftarrow$.
- $(a \geq 0) \leftrightarrow (-a \leq 0)$
  Vediamo $\rightarrow$. Aggiungendo $(-a)$ a entrambi i lati della diseguaglianza $a \geq 0$ viene: $a + (-a) \geq -a \Leftrightarrow 0 \geq -a$ e quindi $-a \leq 0$. Tralasciamo la $\leftarrow$.

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

- $(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)$
  (vediamo $\rightarrow$) Se non fosse $a \leq 0$ allora sarebbe $a > 0$, cioè $(a \geq 0) \wedge (a \neq 0)$.
  Ma da $(0 \geq a)$ e $(a \geq 0)$ si ottiene $a = 0$, che contrasta con $a \neq 0$, ASSURDO. Tralasciamo la $\leftarrow$.
- $(a \geq 0) \leftrightarrow (-a \leq 0)$
  Vediamo $\rightarrow$. Aggiungendo $(-a)$ a entrambi i lati della diseguaglianza $a \geq 0$ viene: $a + (-a) \geq -a \Leftrightarrow 0 \geq -a$ e quindi $-a \leq 0$. Tralasciamo la $\leftarrow$.
- $(a \geq b) \wedge (c \leq 0) \rightarrow (ac \leq bc)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
  Dato che $c \leq 0$ allora $-c \geq 0$. Moltiplichiamo per $-c$
  $a(-c) \geq b(-c) \Leftrightarrow -ac \geq -bc$
  Aggiungendo $ac + bc$ a entrambi i lati
  $-ac + ac + bc \geq -bc + ac + bc \Leftrightarrow bc \geq ac \Leftrightarrow ac \leq bc$

Dalle proprietà precedenti si ricava tutto ciò che serve per trattare le diseguaglianze e le disequazioni.

- $(0 \geq a) \leftrightarrow (a \leq 0)$
  (vediamo $\rightarrow$) Se non fosse $a \leq 0$ allora sarebbe $a > 0$, cioè $(a \geq 0) \wedge (a \neq 0)$.
  Ma da $(0 \geq a)$ e $(a \geq 0)$ si ottiene $a = 0$, che contrasta con $a \neq 0$, ASSURDO. Tralasciamo la $\leftarrow$.
- $(a \geq 0) \leftrightarrow (-a \leq 0)$
  Vediamo $\rightarrow$. Aggiungendo $(-a)$ a entrambi i lati della diseguaglianza $a \geq 0$ viene: $a + (-a) \geq -a \Leftrightarrow 0 \geq -a$ e quindi $-a \leq 0$. Tralasciamo la $\leftarrow$.
- $(a \geq b) \wedge (c \leq 0) \rightarrow (ac \leq bc)\ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
  Dato che $c \leq 0$ allora $-c \geq 0$. Moltiplichiamo per $-c$
  $a(-c) \geq b(-c) \Leftrightarrow -ac \geq -bc$
  Aggiungendo $ac + bc$ a entrambi i lati
  $-ac + ac + bc \geq -bc + ac + bc \Leftrightarrow bc \geq ac \Leftrightarrow ac \leq bc$
- e si può continuare...

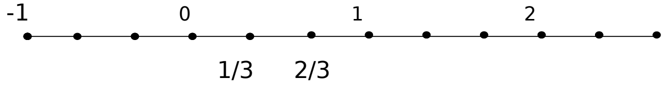
Sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ sono contenuti:

- gli interi $\mathbb{N} = \{0, 1, 1+1, 1+1+1, \dots\}$ (su questo torneremo).
- gli interi relativi $\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$
- i razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathcal{Z}, q \neq 0 \right\}$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Finora peraltro anche $\mathbb{Q}$ verifica TUTTE le propietà considerate.
I numeri razionali si possono *mandare* sulla retta



ma, come già visto, **non coprono** tutti i punti della retta.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ (**intervallo chiuso**)
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ (**intervallo aperto**)

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a, b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a, b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**
- $[a, +\infty[:= \{x : a \leq x\}$ **(semiretta positiva chiusa)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a, b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**
- $[a, +\infty[:= \{x : a \leq x\}$ **(semiretta positiva chiusa)**
- $]a, +\infty[:= \{x : a < x\}$ **(semiretta positiva aperta)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a, b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**
- $[a, +\infty[:= \{x : a \leq x\}$ **(semiretta positiva chiusa)**
- $]a, +\infty[:= \{x : a < x\}$ **(semiretta positiva aperta)**
- $]-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$ **(semiretta negativa chiusa)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Intervalli

Gli intervalli sono dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ definiti come segue.
Dati a e b in $\mathbb{R}$ con $a \leq b$ si pone:

- $[a, b] := \{x : a \leq x \leq b\}$ **(intervallo chiuso)**
- $]a, b[:= \{x : a < x < b\}$ **(intervallo aperto)**
- $[a, b[:= \{x : a \leq x < b\}$ **(intervallo semiaperto a destra)**
- $]a, b] := \{x : a < x \leq b\}$ **(intervallo semiaperto a sinistra)**
- $[a, +\infty[:= \{x : a \leq x\}$ **(semiretta positiva chiusa)**
- $]a, +\infty[:= \{x : a < x\}$ **(semiretta positiva aperta)**
- $]-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$ **(semiretta negativa chiusa)**
- $]-\infty, b[:= \{x : x < b\}$ **(semiretta negativa aperta)**

a e b sono detti gli **estremi** dell'intervallo (o semiretta) corrispondente. Le semirette sono anch'esse degli intervalli, che sono *illimitati*, a differenza degli intervalli con estremi reali, che sono *limitati*.
I simboli $\pm\infty$ (per ora) sono semplici accorgimenti grafici.

Limitatezza

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Definizione Si dice che A è **limitato superiormente** se esiste un numero reale M tale che

$$a \leq M \quad \forall a \in A$$

Un tale M (se esiste) si chiama **maggiorante** per l'insieme A.
Quindi A è limitato superiormente se e solo se esiste un maggiorante per A.
Definizione Si dice che A è **limitato inferiormente** se esiste un numero reale m tale che

$$a \geq m \quad \forall a \in A$$

Allora m si dice **minorante** per A e, come prima,
A è limitato inferiormente$\Leftrightarrow$ A ammette un minorante
Definizione Si dice che A è **limitato** se è contemporaneamente limitato superiormente e inferiormente.

Massimi e minimi

Definizione Si dice che un numero reale $\bar{a}$ è il **massimo** per l'insieme A se:

$$\bar{a} \in A, \qquad a \leq \bar{a} \quad \forall a \in A$$

($\bar{a}$ è l'elemento di A più grande di tutti). Si scrive in tal caso

$$\bar{a} = \max A$$

Analogamente numero reale $\underline{a}$ è il **minimo** per l'insieme A se:

$$\underline{a} \in A, \qquad a \geq \underline{a} \quad \forall a \in A$$

e si scrive

$$\underline{a} = \min A$$

Chiaramente:

$$A \text{ ha massimo } \Rightarrow A \text{ è limitato superiormente}$$

$$A \text{ ha minimo } \Rightarrow A \text{ è limitato inferiormente}$$

IL VICEVERSA NON VALE

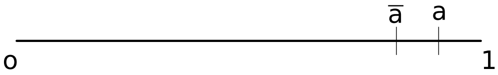
L'intervallo aperto $]0,1[$ **non ha** né massimo né minimo.
Vediamo che non ha massimo. Vediamo cioè che è falso:

$$\exists \bar{a} \in]0,1[: (\forall a \in]0,1[\ a \leq \bar{a})$$

vogliamo cioè che

$$\forall \bar{a} \in]0,1[\ \exists a \in]0,1[: a > \bar{a})$$

Per questo basta osservare che dato $\bar{a}$ con $0 < \bar{a} < 1$ si può prendere $a := \dfrac{\bar{a}+1}{2}$ (cioè il punto medio tra $\bar{a}$ e 1) e allora si ha $\bar{a} < a < 1$.



Estremi superiore e inferiore

Sia A un insieme con $A \neq \emptyset$
Definizione Un numero reale $\bar{a}$ si dice l'**estremo superiore** di A se

$$\bar{a} = \min\{M : M \text{ è maggiorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\bar{a} = \sup A$.
Definizione Un numero reale $\underline{a}$ si dice l'**estremo inferiore** di A se

$$\underline{a} = \max\{M : M \text{ è minorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\underline{a} = \inf A$. Notiamo che:

- $\bar{a} = \max A \Leftrightarrow (\bar{a} = supA) \wedge (\bar{a} \in A)$

Estremi superiore e inferiore

Sia A un insieme con $A \neq \emptyset$

Definizione Un numero reale $\bar{a}$ si dice l'**estremo superiore** di A se

$$\bar{a} = \min\{M : M \text{ è maggiorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\bar{a} = \sup A$.

Definizione Un numero reale $\underline{a}$ si dice l'**estremo inferiore** di A se

$$\underline{a} = \max\{M : M \text{ è minorante per } A\}$$

e in tal caso si scrive $\underline{a} = \inf A$. Notiamo che:

- $\bar{a} = \max A \Leftrightarrow (\bar{a} = supA) \wedge (\bar{a} \in A)$
- $\underline{a} = \min A \Leftrightarrow (\underline{a} = infA) \wedge (\bar{a} \in A)$

$$\boxed{\sup]0,1[=1 \qquad \inf]0,1[=0}$$

Vediamo la prima affermazione. Prima di tutto verifichiamo che

$$B := \{\text{maggioranti di }]0,1[\} = [1,+\infty[$$

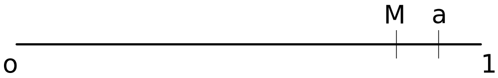
Infatti tutti i numeri in $[1,+\infty[$, sono maggioranti per A:

$$M \geq 1 \Rightarrow \forall a \in]0,1[\ M \geq 1 > a \Rightarrow M \geq 1$$

mentre se $M < 1$, allora M non è più maggiornate per A: preso $a := \dfrac{M+1}{2}$ risulta

$$a \in]0,1[\qquad M < a$$

Dunque l'insieme dei maggioranti è $[1,+\infty[$, che ha ovviamente minimo pari a 1



Fino a ora sarebbe stato lo stesso se ci fossimo messi $\mathbb{Q}$.
Però se insistessimo nel rimanere in $\mathbb{Q}$ troveremmo subito degli insiemi limitati che non hanno estremo superiore:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA Ogni insieme limitato superiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo superiore.

Ogni insieme limitato inferiormente e non vuoto in $\mathbb{R}$ **ammette** estremo inferiore.

FORMULAZIONE EQUIVALENTE Supponiamo che A e B siano una *sezione* di $\mathbb{R}$, cioè $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ e

$$\forall a \in A \; \forall b \in B \;\; a \leq b$$

Allora esiste un *elemento separatore*, cioè un numero $c \in \mathbb{R}$ t.c :

$$\forall a \in A \; \forall b \in b \;\; a \leq c \leq b$$

Caratterizzazioni

Se A è un insieme non vuoto e superiormente limitato e $\bar{a} \in \mathbb{R}$

$$\bar{a} = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \bar{a} \ \forall a \in A \\ \forall a' < \bar{a} \ \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a) \end{cases}$$

La prima riga dice che $\bar{a}$ è un maggiorante per A, la seconda che tutti numeri più piccoli di $\bar{a}$ non sono maggioranti.
Dunque $\bar{a}$ è il minimo dei maggioranti. Analogamente

$$\underline{a} = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \underline{a} \ \forall a \in A \\ \forall a' > \underline{a} \ \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a) \end{cases}$$

Casi infiniti Se A non è limitato superiormente si pone $\sup A = +\infty$
Se A non è limitato inferiormente si pone $\inf A = -\infty$
Inoltre si conviene che $\sup \emptyset = -\infty, \qquad \inf \emptyset = +\infty$
Nei casi infiniti le caratterizzazioni precedenti diventano: sia $A \neq \emptyset$, allora

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R} \exists a : (a \in A) \wedge (a' < a)$$

Questa è in effetti la caratterizzazione del fatto che A non è limitato superiormente.
Analogamente

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \forall a' \in \mathbb{R} \exists a : (a \in A) \wedge (a' > a)$$