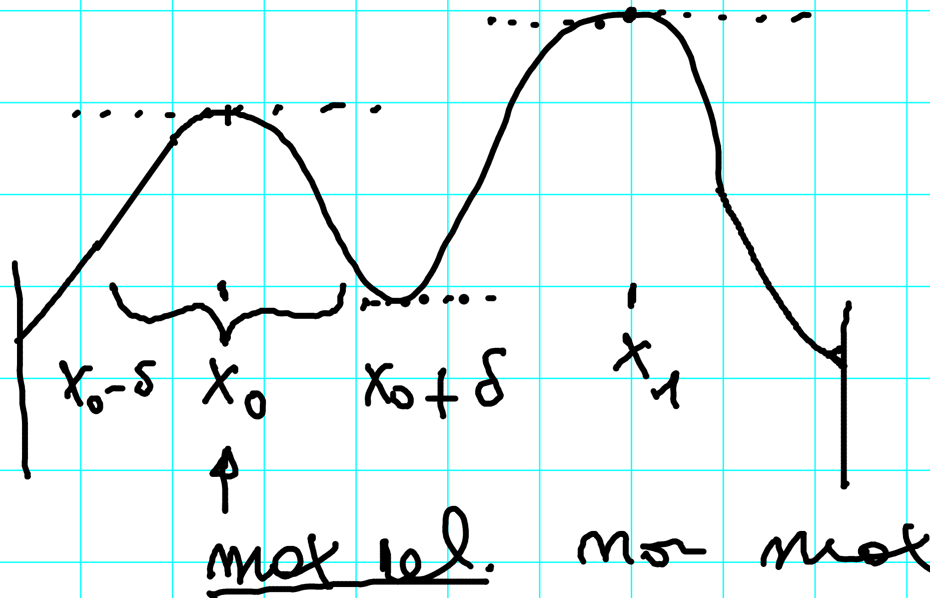
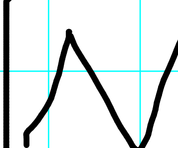


x_0 max/min relativo

$\Longrightarrow \quad f'(x_0)=0$

PURCHÉ x_0 INTERNO

(x_0 NON ESTREMO)



e PURCHÉ

$\exists\, f'(x_0)$

Dim. x_0 pto di max rel. ~~e $x \in I$~~

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[$

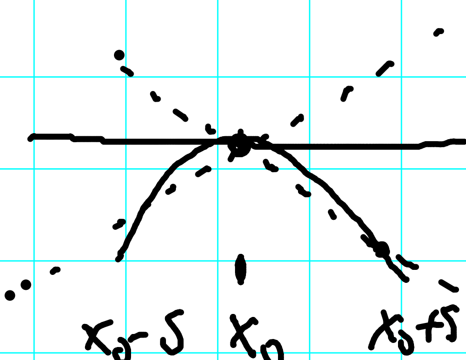
$$f(x) \le f(x_0)$$

Siccome x_0 NON È UN ESTREMO

posso supporre che $\left]x_0-\delta, x_0+\delta\right[\subset I$

Se prendo $x_0 < x < x_0+\delta$

$$(*) \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$$



Se invece $x_0-\delta < x < x_0$

$$(**) \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$$

Rapp inc.

Dato che $\exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} (*) = \lim_{x\to x_0^-} (*)$

$\Rightarrow f'(x_0)$ deve essere 0 $\qquad \le 0 \qquad \ge 0$

Tutte le ipotesi sono necessarie.

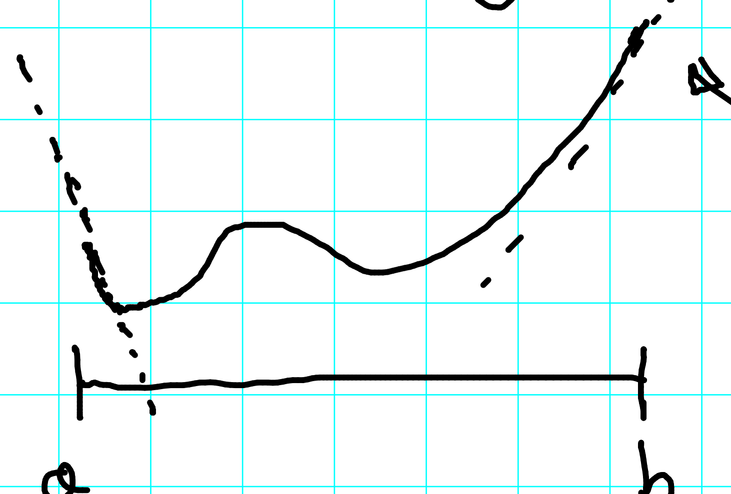
(1)

(f non derivabile in x_0)

esistono $f'_+(x_0) \,/\, f'_-(x_0)$

$f'_+(x_0) > 0$, $f'_-(x_0) < 0$

(2)



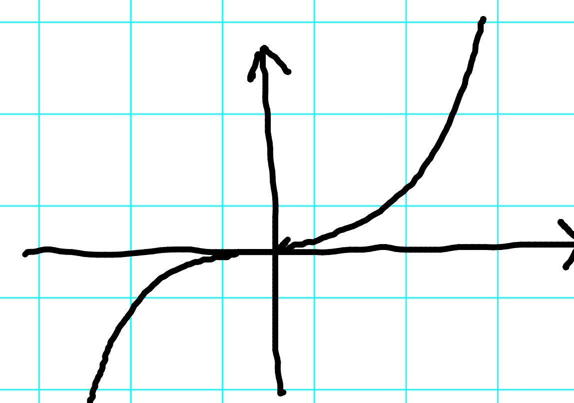
max (c'è solo la derivata sinistra che è ≥ 0

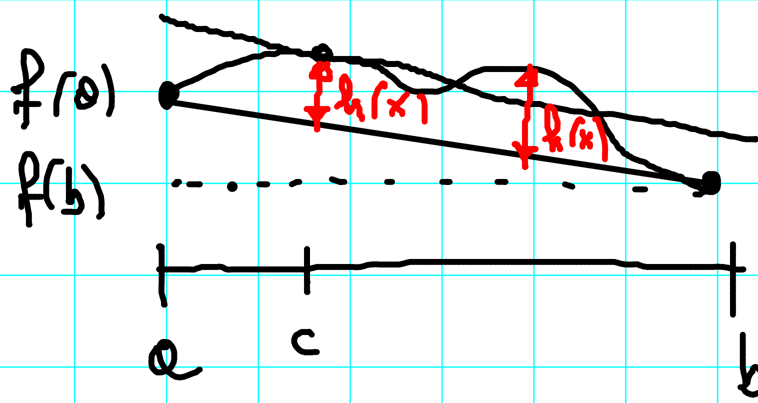
Def. $f'(x_0)=0$ dico che

x_0 È STAZIONARIO / CRITICO

NON TUTTI I PTI STAZIONARI SONO DI MAX / MIN Rel

$f(x)=x^3$ 0 è stazionario





$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

retta : $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Dim. Poniamo $g(x) = \underbrace{f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}_{\text{(la retta)}}$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

h è continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$

Per Weierstrass $\exists\ x_1, x_2 \in [a,b]$

$$h(x_1) \leq h(x) \leq h(x_2) \qquad \forall x \in [a,b]$$

Distinguo due casi:

(I) x_1 e x_2 sono estremi di $[a,b]$

(cioè $x_1 = a/b$, $x_2 = a/b$)

Calcoliamo $h(a)$ e $h(b)$

$$h(a) = f(a) - g(a) = f(a) - f(a) = 0$$

$h(b) = \dots = 0$ (fate il conto)

Allora $h(x_1) = 0$ $h(x_2) = 0$ $\Rightarrow$

$$0 \leq h(x) \leq 0 \quad \forall x$$

$\Rightarrow h(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow \boxed{h'(x) = 0 \quad \forall x}$

(II) uno dei due (x_1 o x_2) $\in]a,b[$

lo chiamo c; per Fermat $\boxed{h'(c) = 0}$

IN ENTRAMBI I CASI c'è un $c \in]a,b[$ in cui

$$\iff \quad f'(c) - g'(c) = 0$$

$$\iff \quad f'(c) = g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(la derivata di g è)

(su $[a,b]$)

f crescente $\Leftrightarrow$ $f' \geq 0$

Dim. $\Rightarrow$ (def. di derivata) infatti

f crescente $\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$

$\forall x, y \quad x \neq y$

Se fisso x_0 e faccio tendere $x \to x_0$

$$f'(x_0) \ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad (\forall x_0)$$

$\Longleftarrow$ (meno ovvio)

Se provo a invertire il ragionamento: !

(So $f'(x) \geq 0 \quad \forall x$)

$f'(x) > 0$

NON POSSO DIRE: se $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow$ rapp. incr. ≥ 0 !!!

BISOGNA USARE LAGRANGE

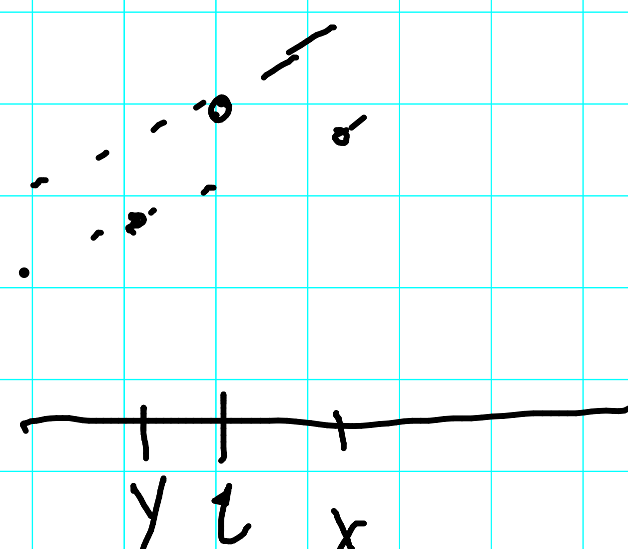
$\Leftarrow$ Prendo due punti $x > y$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(t) \geq 0$$

per ipotesi

(per Lagrange $\exists\ t \in]x, y[$

(nell'intervallo $[x,y]$)



$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$

$\Rightarrow f$ crescente

In particolare $f'(x)=0 \Longleftrightarrow f$ costante

Esempio

$$f(x) = \operatorname{artg}(x) + \operatorname{artg}\left(\frac{1}{x}\right)$$

calcoliamone la derivata.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{artg}(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

$$\left(g(x) = tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ ;\quad g'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right.$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2(x)\ ;$$

$$\left. f(x) = \operatorname{artg}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{1+x^2} \right)$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\frac{1}{x^2} =$$

$$-\frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$\boxed{f \text{ È DEFINITA IN } \mathbb{R}\setminus\{0\}}$

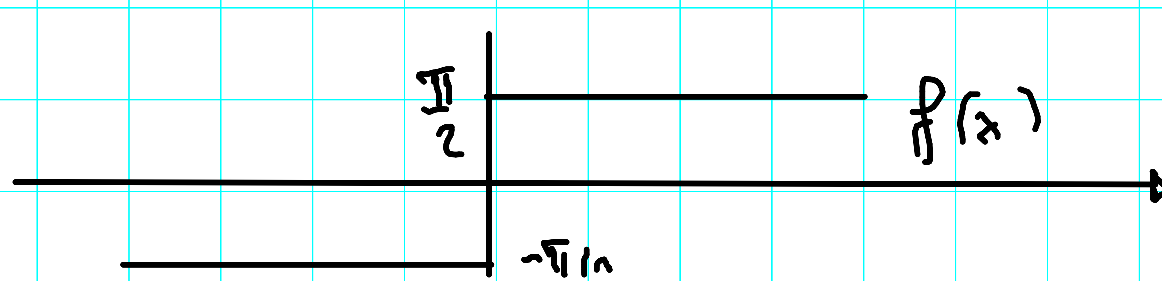
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \overset{??}{\Rightarrow} f \text{ costante}$$

NON SIAMO SU UN INTERVALLO

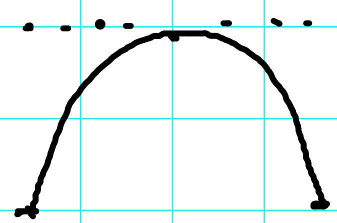
$x = 1 \quad \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$x = -1 \quad f(-1) = -f(1) = -\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$



(Rolle)



$\exists c$ compreso tra a e b

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(Cauchy)

<u>Dim.</u> $h(x) = A f(x) + B g(x)$

Cerco A e B in modo che $h(a) = h(b)$

$$A f(a) + B g(a) = A f(b) + B g(b) \iff$$

$$A\left(f(a) - f(b)\right) = B\left(g(b) - g(a)\right)$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

scelgo $A = g(b) - g(a)$ $\quad B = f(a) - f(b) \Rightarrow$

$$\exists\, c : \; h'(c) = 0 \iff A f'(c) + B g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = -\frac{B}{A}$$

Hôpital CASO $\frac{0}{0}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}$, DIM.

Ricordiamo che $h(x) \to \ell$ per $x \to x_0$

$\Longleftrightarrow$ (DEF.) $\forall (x_n)$ con $x_n \to x_0$ $x_n \neq 0$ $\Rightarrow h(x_n) \to \ell$

SO: $\forall (x_n)$ con $x_n \neq x_0$ $x_n \to x_0$ $\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} \to \ell$

VOGLIO: $\forall (x_n)$ con $x_n \neq x_0$ $x_n \to x_0$ $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \ell$

Quindi prendiamo una (x_n) tale che

$x_n > x_0$ $x_n \to x_0$ (USO CAUCHY)

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = (*) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} \to \ell$$

(*) posso (ri)definire f e g in x_0 mettendole eguali a zero. $\Rightarrow$ f e g CONTINUE IN x_0 ($\forall x$)

dove $\quad x_0 < y_n < x_n$

(y_n è dato dal teorema di Cauchy)

Per il teorema del confronto sui limiti

$y_n \to x_0 \quad \Rightarrow$ (per ipotesi)

$$\frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} \to \ell$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 \ln(x)$$

posso provare mettendolo nella forma

$$\frac{x^3}{\frac{1}{\ln(x)}}$$ (PESSIMA IDEA)

Provo a derivare sopra e sotto...

$$\frac{3x^2}{\frac{-1/x}{\ln^2(x)}} = 3x^3 \ln^2(x)$$

MEGLIO SCRIVERE

$$\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^3}} \overset{(H)}{\rightsquigarrow} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} = \frac{x^3}{-3} \to 0 \,!!$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{(H.)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

? posso dire che ho "dimostrato" il limite notevole ? NO

(come trovo la derivata di $\sin(x)$? mediante $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ . . . .)

Problema $\quad f: I \to \mathbb{R} \quad , x_0 \in I$

f DERIVABILE $\forall x$ in I TRANNE x_0

Supponiamo che

$$\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \quad (\in \mathbb{R})$$

POSSO CONCLUDERE CHE $f'(x_0) = \ell$?!

(per esempio $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $f(0) = 1$

se $x \neq 0$ $\quad f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} 0$ ⊛

Posso dire che $f'(0) = 0$!?) ← SÌ

⊛ (con Hôpital)

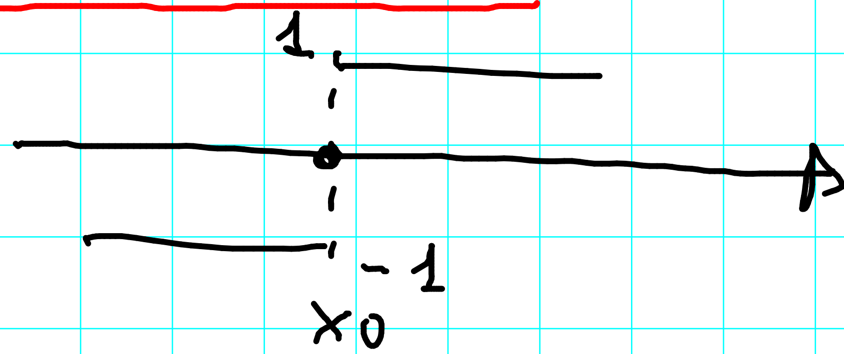
NOTA CHE QUESTA f È $\boxed{\text{CONTINUA}}$

IN ZERO

$\dfrac{\sin x}{x} \to 1 = f(0)$

IN GENERALE NO

$f(x)$



f NON È CONTINUA IN 0

f è derivabile se $x \neq 0$ $\qquad f'(x) = 0$ se $x \neq 0$

$$f'(x) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

MA f NON È DERIV. IN $x=0$

SE f È CONTINUA IN x_0 ALLORA <u>SÌ</u>

$$\underset{(\text{se esiste})}{f'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(H.)}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1}$$

È UNA FORMA INDETERMINATA A PATTO CHE

f CONTINUA IN x_0