ANALISI 1 [1]
VENTICINQUESIMA LEZIONE
Equazioni differenziali
Equazioni lineari del primo ordine

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Sia n intero. Un'*equazione differenziale di ordine n*, scritta come

$$\mathscr{F}(x, y, \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

dove $\mathscr{F}$ è una funzione di $n+2$ variabili, è un problema che consiste nel trovare:

- un intervallo I di $\mathbb{R}$
- una funzione $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avente derivate fino all'ordine n

tali che per ogni $x \in I$

- l'$(n+2)$-pla $(x, y(x), \ldots, y^{(n)})$ appartiene al dominio di $\mathscr{F}$,
- vale l'eguaglianza:

$$\mathscr{F}(x, y(x), \cdots, y^{(n)}(x)) = 0$$

L'incognita è quindi la funzione $x \mapsto y(x)$, dove anche il dominio di y non è noto a priori.
L'ordine n dell'equazione è il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.

Si dice che l'equazine è in *forma normale* se si può scrivere come

$$y^{(n)} = \mathscr{F}_0(x, y, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

cioè se si può esplicitare la derivata di ordine massimo – formalmente se

$$\mathscr{F}(x, y_0, \cdots, y_n) = y_n - \mathscr{F}_0(x, y_0, \cdots, y_{n-1})$$

Per esempio il moto di un punto di massa m, vincolato a muoversi su una retta, è descritto dall'equazione

$$my'' = \mathbf{F}(t, y, y')$$

dove $\mathbf{F}$ rappresenta la forza agente sul punto, che all'istante t dipende dal tempo t, dalla posizione (monodimensionale) $y(t)$ e dalla velocità $y'(t)$.

Diciamo che l'equazione è *lineare* se si può scrivere:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdot + a_0(x)y = b(x) \tag{3}$$

cioè se

$$\mathscr{F}(x, y_0, \cdots, y_n) = a_n(x)y_n + \cdots + a_0(x)y_0 - b(x)$$

è affine (anche se di solito si usa dire lineare) rispetto a $y_0, \ldots, y_n$.

Nel caso in cui $\boxed{b(x) = 0}$ (quindi $\mathscr{F}$ è veramente lineare rispetto a $y_0, \ldots, y_n$) si dice che l'equazione lineare è *omogenea*.

Notiamo che nel caso lineare l'equazione si può mettere in forma normale se (e praticamente solo se) $\boxed{a(x) \neq 0}$

Anche se non è stato ancora detto l'ipotesi che si metterà sempre è che i *coefficienti* $a_0, \ldots, a_n$ e b siano funzioni continue di x.

L'equazione lineare del primo ordine

Consideriamo l'equazione lineare del primo ordine in forma normale

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{4}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I di $\mathbb{R}$

Teorema

Fissiamo un punto x_0 in I. Allora per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ esiste una ed una sola $y : I \to \mathbb{R}$, derivabile con derivata continua, che risolve (4) e tale che $\boxed{y(x_0) = y_0.}$ *Tale y è espressa dalla formula:*

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}\, dt \right) \tag{5}$$

dove

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt \tag{6}$$

Il teorema mostra che

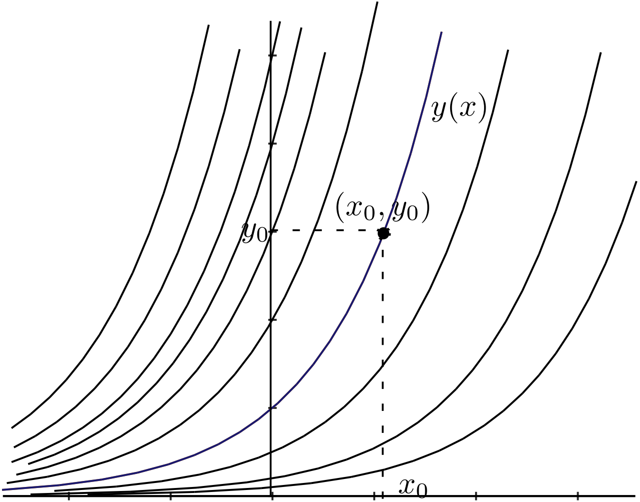
- l'equazione (4) ha infinite soluzioni;
- la soluzione diventa unica se si impone che "passi" per un punto assegnato (x_0, y_0) di $I \times \mathbb{R}$
  – la famiglia delle soluzioni "descrive tutto $I \times \mathbb{R}$ FIGURA;
- le soluzioni sono definite su tutto I: cioè su tutto l'intervallo in cui l'equazione ha senso (esistenza massimale);
- la generica soluzione y è somma di una soluzione particolare

$$\bar{y}(x) = e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} b(t) e^{-A(t)}\, dt$$

(quella che in x_0 vale zero) e delle funzioni

$$y_0(x) = y_0 e^{A(x)} \qquad y_0 \in \mathbb{R}$$

che sono tutte e sole le soluzioni dell'omogena;
- nel caso $a(x) = 0$ si ritrova il teorema sulle primitive.


$y(x)$
(x_0, y_0)
y_0
x_0

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA

Alcuni esempi:

1. $y' = 2y + x$
2. $y' = 2\dfrac{y}{x} + 1$
3. $y' = \dfrac{xy}{1+x^2} - x^2$
4. $y' = \dfrac{y}{2x} - 1 - \dfrac{1}{x^2}$

SVOLGIMENTO

Osservazione

La formula (5) fornisce l'espressione del problema con la condizione $y(x_0) = y_0$ – questo si chiama problema di Cauchy o problema ai dati iniziali.

Dalla formula si capisce che la famiglia delle soluzioni dipende sostanzialmente da UN parametro (che è y_0), anche se tale parametro non "è canonico".
In sostanza per "etichettare" le soluzioni posso fissare x_0 e per ogni y guardare il suo valore in x_0 – chiaramente se cambio x_0 le "etichette" cambiano ma rimane il fatto che ho a disposizione UNA costante.

Osservazione

Se non mi interessa il significato di questo parametro posso anche dire che, per trovare tutte le soluzioni dell'equazione (4)

- *fisso una primitiva* $A(x)$ *di* $a(x)$, *cioè prendo* $A \in \int a(x)\,dx$
- *prendo tutte le* $y(x)$ *date da*

$$y(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,dx$$

(l'integrale indefinito è la famiglia di TUTTE le primitive). Quindi

$$y(x) = e^{A(x)}(C + F(x)) \qquad per\ F \in \int b(x)e^{-A(x)}\,dx. \tag{7}$$

Non è difficile vedere che, se cambio la primitiva A (aggiungendogli una costante) alla fine la famiglia di funzioni descritta da (7) *rimane la stessa (anche se cambia la costante che descrive una singola funzione).*