Formula risolutiva di $\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Dico che $$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{-A(t)}\,dt\right) \leftarrow (F)$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,dt$$

① VERIFICHIAMO CHE (F) risolve l'equazione

$$y'(x) = e^{A(x)}\,A'(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{-A(t)}\,dt\right) + e^{A(x)}\left(0 + b(x)\,e^{-A(x)}\right) =$$

$$a(x)\,e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\,e^{-A(t)}\,dt\right) + b(x)\,e^{A(x)-A(x)} =$$

$$a(x)\,y(x) + b(x)$$

È anche chiaro che $y(x_0) = y_0$

② VICEVERSA supponiamo che y sia soluzione

$$y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x) \qquad \forall x \in I$$

$$y'(x) - a(x)\, y(x) = b(x)$$

Moltiplico l'equazione per $e^{-A(x)} \neq 0$

$$\underbrace{e^{-A(x)} y'(x) - a(x)\, y(x)}_{\displaystyle \frac{d}{dx}\left(y(x)\, e^{-A(x)} \right)} = b(x)\, e^{-A(x)}$$

$$\left(= y' e^{-A(x)} - a(x)\, e^{-A(x)} y \right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-A(x)} y(x) \right) = b(x)\, e^{-A(x)}$$

INTEGRO TRA x_0 e x

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)} y(t) \right) dt = \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)}\, dt$$

$$\left[e^{-A(t)} y(t) \right]_{x_0}^{x} = e^{-A(x)} y(x) - \underbrace{e^{-A(x_0)}}_{=1} y(x_0) =$$

$$= e^{-A(x)} y(x) - y_0$$ DUNQUE

$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)\, e^{-A(t)} dt \right) e^{A(x)}$$

FINE

NOTA Se non mi interessa di x_0 e y_0 posso fare così: per trovare $y(x)$ devo:

(1) FISSO una primitiva $A(x)$ di $a(x)$

$$\left(A \in \int a(x)\, dx \right)$$

(2) $$y(x) = e^{A(x)} \underbrace{\int e^{-A(x)} b(x)\, dx}_{\text{UNA PRIMITIVA + cost.}}$$

DI SOLITO SI TROVA

"
$$y(x) = e^{A(x)} \left(C + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \right)$$

con $A(x) = \int a(x)\,dx$ "

CHE VA LETTA COME (1) + (2).

Si vede facilmente che se cambio A, le soluzioni rimangono le stesse. $A_1 = A + K$

$$y(x) = e^{A(x)+K} \left(c + \int e^{-A(x)-K} b(x)\,dx \right) =$$

$$e^{A(x)} \left(e^{K} c + \int e^{-A(x)} b(x)\,dx \right)$$

al variare di tutte le c in $\mathbb{R}$ trovo le stesse funzioni di prima

ESEMPIO 1

$$y'(x) = 2y + x$$

$$a(x) = 2 \qquad b(x) = x \qquad \text{FISSO } x_0 = 0$$

$$A(x) = \int_0^x 2\,dt = \left[2t\right]_0^x = 2x$$

$\Rightarrow$ (FORMULA)

$$y(x) = e^{2x}\left(y(0) + \int_0^x t\,e^{-2t}\,dt\right) = (*)$$

$$\int t\,e^{-2t}\,dt = \frac{t\,e^{-2t}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}\,dt =$$

$$-\frac{1}{2}t\,e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \text{cost}.$$

$$(*) = e^{2x}\left(y(0) + \left[-\frac{1}{2}t\,e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^x\right) =$$

$$e^{2x}\left(y(0) - \frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}\right) = c\,e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

dove $c = y(0) + 1/4$

QUINDI $y(x) = c\,e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ dove $c = y(0) + \frac{1}{4}$

VORREI FARE I GRAFICI DELLE $y(x)$, al variare di c

$\mapsto$ studio di funzione dipendente dal parametro c.

<u>DOMINIO</u> $= \mathbb{R}$

<u>LIMITI</u> $\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & c > 0 \\ -\infty & c = 0 \\ -\infty & c < 0 \end{cases}$$

$c > 0$ (l'esponenziale VINCE!!)

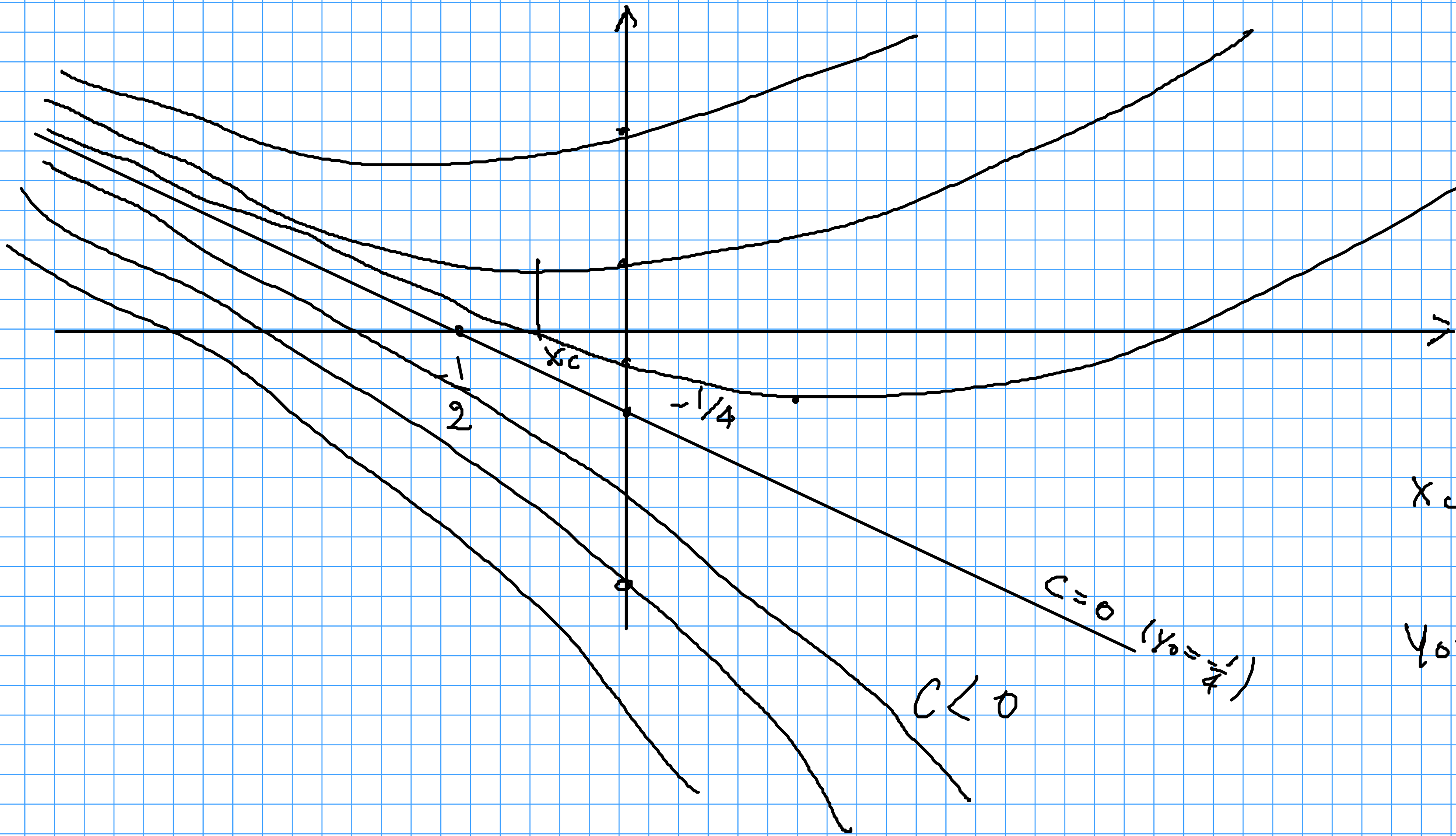
$c \leq 0$

<u>MONOTONIA</u> $\leftrightarrow$ segno di $y'(x)$

$y'(x) = 2c\,e^{2x} - \frac{1}{2}$ $\quad c \leq 0$ sempre negativo

$c > 0 \quad y'(x) \geq 0 \iff e^{2x} \geq \frac{1}{4c} \iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4c}\right)$

NOTA: se $C=0$ $\quad y(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ è una retta



$$x_c = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{4c}\right)$$

$$y_0 = C - \frac{1}{4}$$

la retta $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ è un asintoto a $-\infty$ $(e^{2x} \to 0)$

$x_c \to +\infty$ per $C \to 0$ (le curve si schiacciano sulla retta e il minimo si sposta a $+\infty$)

ALTRO MODO DI FARE L'ESERCIZIO

(sfruttando l'equazione !)

(1) trovo la soluzione come prima $y(x) = Ce^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

(2) trovo i limiti come prima;

(3) chiamo $F(x, y) = 2y + x$ (l'eq: $y' = F(x, y)$)

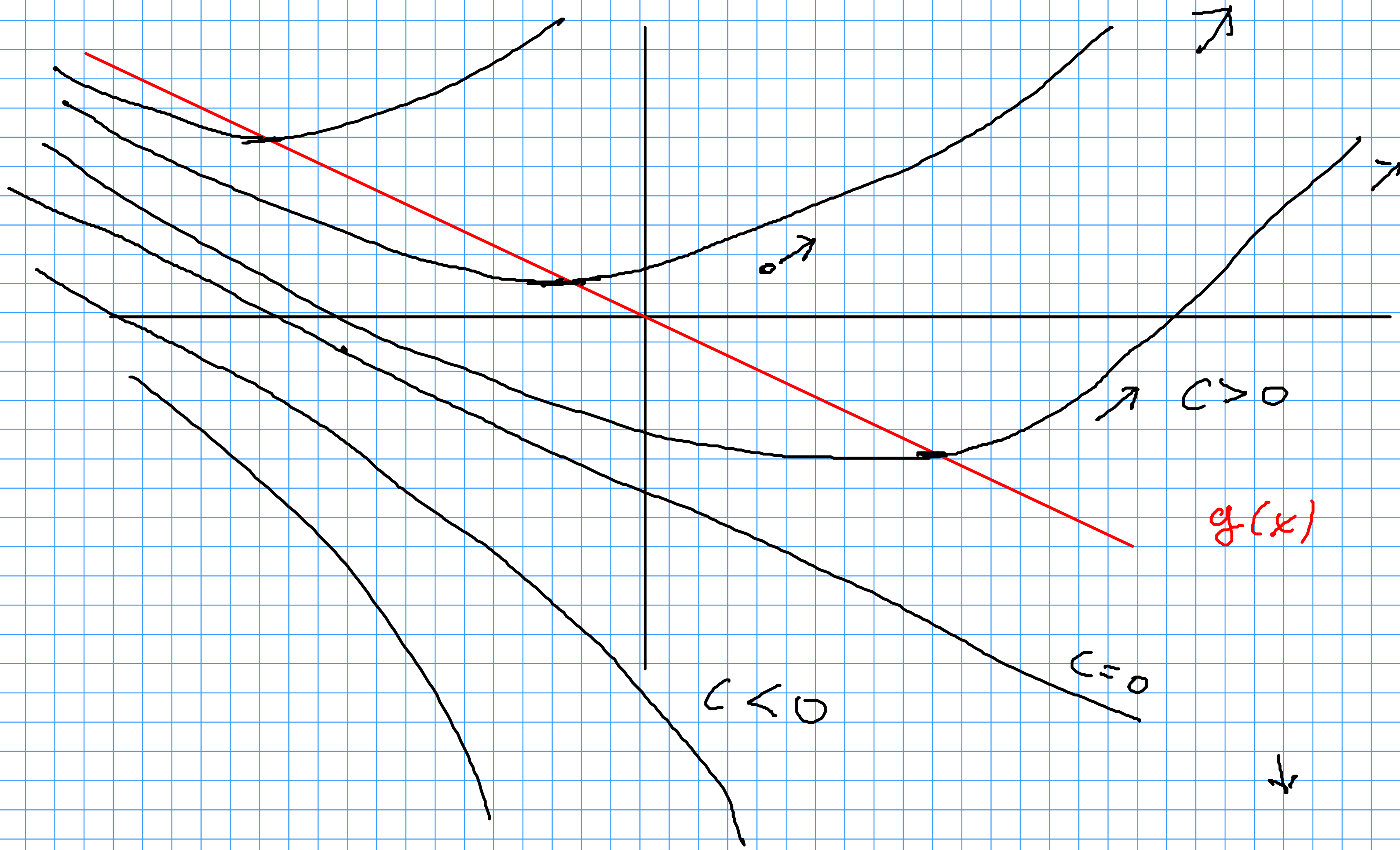
studiamo le zone di $\mathbb{R}^2$ in cui $F(x,y) \geq 0$ / ≤ 0 / $= 0$

$F(x,y) = 0 \iff y = \underbrace{-\frac{x}{2}}_{g(x)}$ $\left(\begin{array}{l} F(x,y) > 0 \iff y > -\frac{x}{2} \\ F(x,y) < 0 \iff y < -\frac{x}{2} \end{array} \right)$

Facciamo il grafico di $y = g(x)$

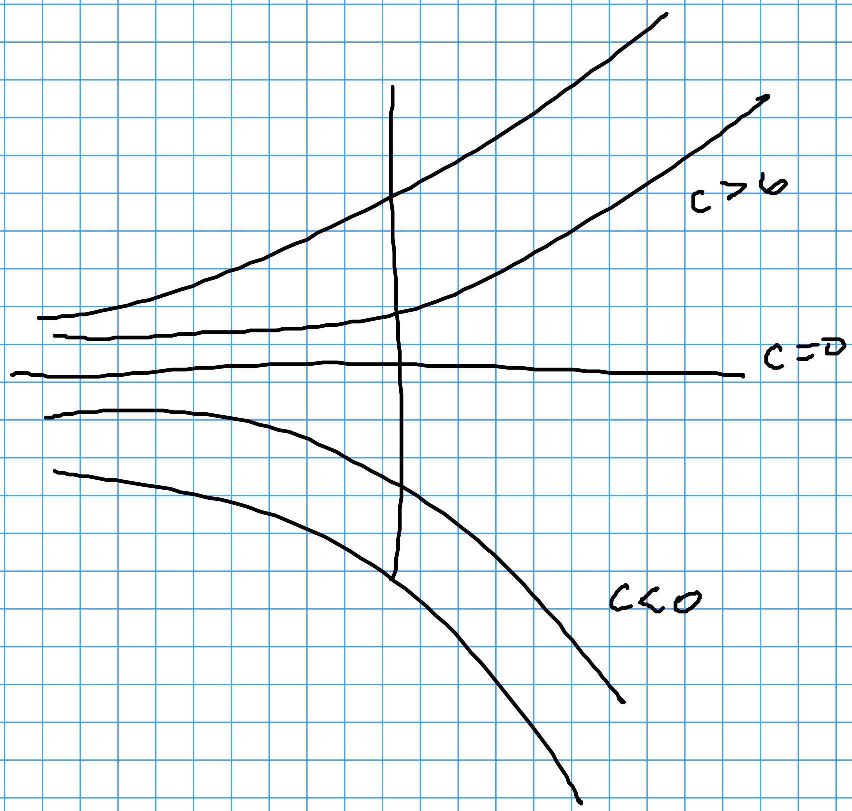
$y'(x) > 0$ se $(x, y(x))$ SOPRA LA RETTA $y = g(x)$ $y'(x) = F(x, y)$

$y'(x) < 0$ se $(x, y(x))$ sotto LA RETTA $y = g(x)$



C > 0
g(x)
C = 0
C < 0

$y' = 2y$ $\qquad$ $y(x) = c\, e^{2x}$



ESEMPIO 3

$$y'(x) = \frac{x}{1+x^2}\, y - x^2$$

$I = \mathbb{R}$ $\qquad a(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ $\qquad b(x) = -x^2$ $\qquad \boxed{x_0 = 0}$

(1) $$A(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\, dt =$$

$$\frac{1}{2}\Big[\ln(1+t^2) \Big]_0^x = \frac{1}{2}\Big(\ln(1+x^2) - \ln(1) \Big) =$$

$$\ln\sqrt{1+x^2}$$

(2) $$y(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_0^x e^{-A(x)}\, b(x) \right) =$$

$$\sqrt{1+x^2}\left(y_0 - \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \right) = (*)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int t\,\underbrace{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\,dt = (\text{per parti})$$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{1+t^2} = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$= t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} = t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,dt$$

$$\|$$

$$\int \frac{t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt - \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int \sqrt{1+t^2}\,dt - \operatorname{arsinh}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(t) \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \boxed{\frac{1}{2}\,t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(t)} \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = \sqrt{1+x^2}\left(y_0 - \left[\frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(t)\right]_0^x\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{1+x^2}\left(y_0 - \frac{1}{2} x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}(x)\right)}$$

STUDIAMO LA FAMIGLIA DELLE SOLUZIONI AL VARIARE DI y_0

(2) LIMITI (vince $x\sqrt{1+x^2}$!!)

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$$

(3) MONOTONIA . Usiamo il secondo metodo: $F(x,y) = \frac{xy}{1+x^2} - x^2$

(l'equazione diff. è $y' = F(x,y)$)

Studio il luogo degli zeri di F : $\frac{xy}{1+x^2} = x^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{oppure} \\ y = (1+x^2)x \end{cases}$

Studiamo $g(x) = x(1+x^2)$ $\qquad \lim_{\substack{x\to-\infty \\ x\to+\infty}} g(x) = -\infty / +\infty$

$g'(x) = 1 + 3x^2 > 0$