Esempio

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(x)}{1+x^2}}_{f(x)} \, dx$$

f cambia segno

Cerco di dim. che f è assolutamente integrabile, cioè che $|f(x)|$ integrabile. Dato che

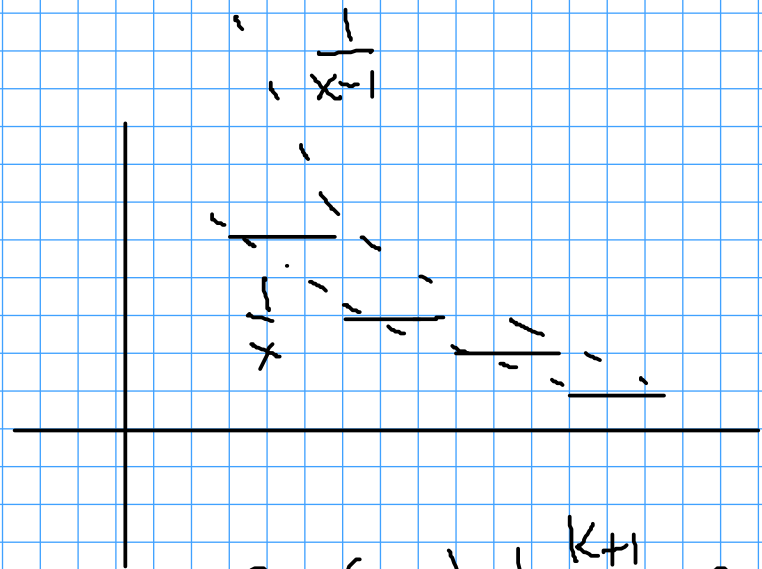
- $$0 \leq |f(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

So che $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} < +\infty \Rightarrow$ per il confronto $|f|$ è integrabile.

- Per il criterio della conv. assoluta anche f è integrabile

Esempio (legame tra serie e integrale improprio)

$$S_k = \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} = \int_1^{k+1} \frac{1}{[x]}\,dx$$



$$\frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]} \le \frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \quad S_k \ge \int_1^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)\Big|_1^{k+1} = \ln(k+1)$$

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m} = 1 + \sum_{m=2}^{k} \frac{1}{m} = 1 + \int_2^{k+1} \frac{1}{[x]}\,dx \le 1 + \int_2^{k+1} \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= 1 + \Big[\ln(x-1)\Big]_2^{k+1} = 1 + \ln(k)$$

DUNQUE $\ln(k+1) \le \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{m} \le 1 + \ln(k) \quad \forall k$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} \simeq \ln(k)$$ perché

$$\frac{1}{\ln(k)} S_k = (*)$$

$$\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)} \leq (*) \leq \underbrace{\frac{1}{\ln(k)} + 1}_{\to 1 \text{ per } k \to +\infty}$$

$$\frac{\ln(k+1)}{\ln(k)} = \frac{\ln(k(1+1/k))}{\ln(k)} = \frac{\ln(k) + \ln(1+\frac{1}{k})}{\ln(k)} = 1 + \frac{\ln(1+1/k)}{\ln(k)} \to 1$$

Cioè $(*) \to 1$ per $k \to +\infty$

Teorema Se $f(x)$ è decrescente e ≥ 0

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \iff \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) < +\infty$$

(sto prendendo $a_n = f(n)$)

PER ESEMPIO : $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx < +\infty \iff \alpha > 1$

DIM. Basta notare che: $x-1 \leq [x] \leq x$

$$f(x) \leq f([x]) \leq f(x-1)$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} f([x])\,dx \leq \int_0^1 f([x]) + \int_1^{+\infty} f(x-1)\,dx =$$

$$f(0) + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

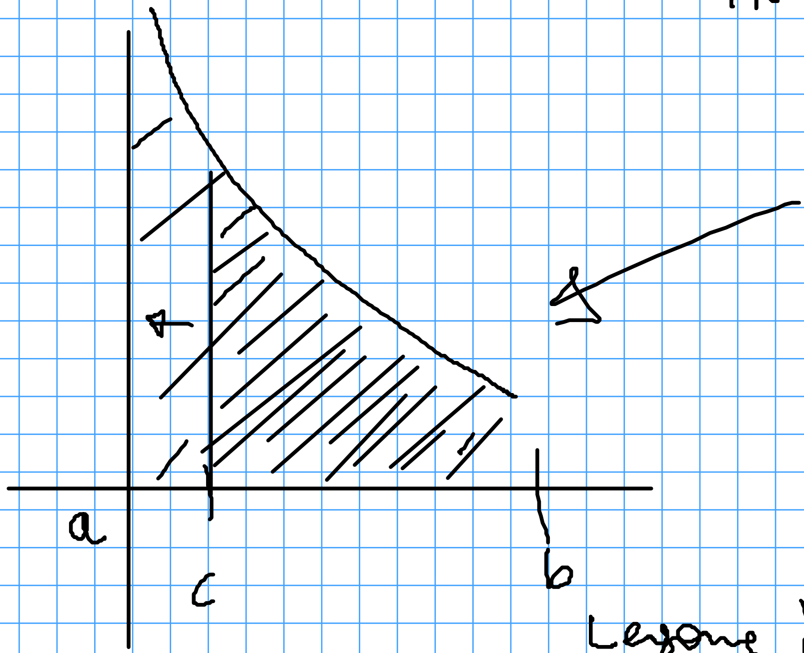
(cambio di variabile)

Queste disuguaglianze ci dicono che

$f(n)$ è sommabile $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ è integrabile

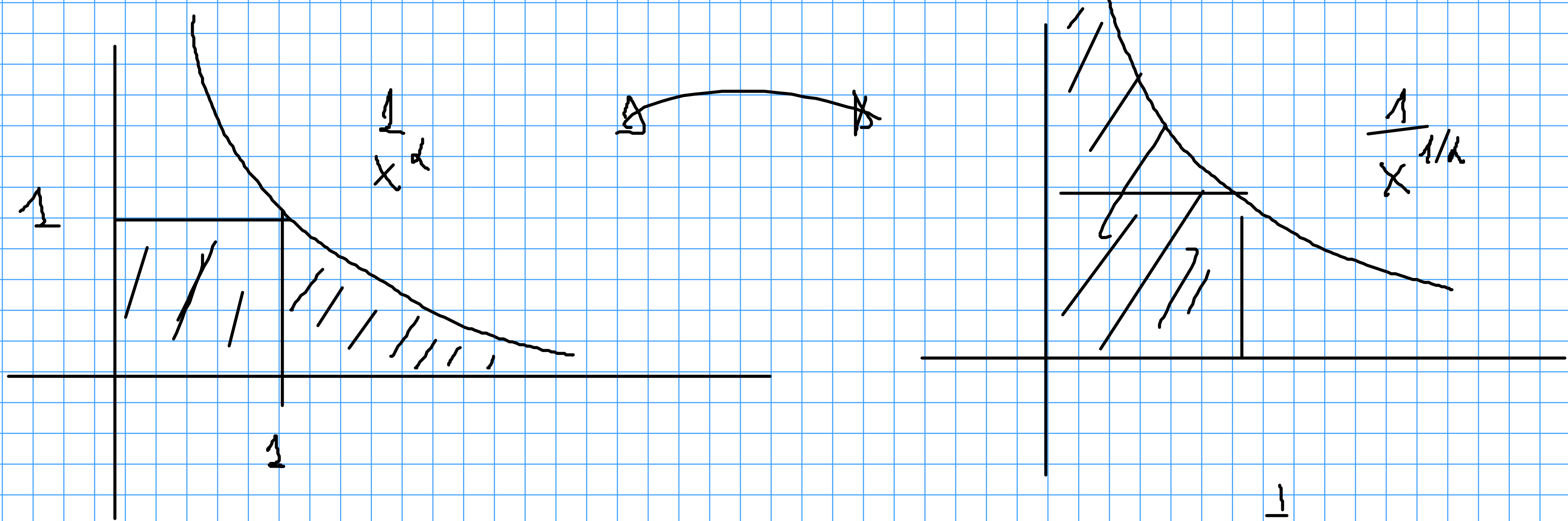
(Si può ridimostrare il carattere della serie armonica mediante gli integrali impropri)

INTEGRALE IMPROPRIO SU $]a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx$$

Legame tra $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$ e $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/\alpha}}$



$$\frac{1}{x^\alpha} = y \iff \frac{1}{x} = y^{\frac{1}{\alpha}} \iff x = \frac{1}{y^{1/\alpha}}$$

Esempio

$$\int_0^1 \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin(x)}{x}}_{f}\,dx$$

- f cambia segno NO criterio confronto / confr. asintotico
- USO la conv. assoluta, mi chiedo se $|f|$ è int. su $]0,1]$.

Per questo $$|f(x)| = \left|\overbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}^{\text{BRUTTO}}\frac{\sin(x)}{x}\right| \le \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = \frac{\sin(x)}{x}$$

- Mi chiedo se $\frac{\sin(x)}{x}$ è integrabile su $]0,1]$

So che $g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \to 1$ per $x \to 0$; dunque se pongo $g(0)=1$

g risulta continua $\Rightarrow$

$$\int_c^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_c^1 g(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 g(x)\,dx < +\infty$$

- DUNQUE $\frac{\sin(x)}{x}$ è int $\Rightarrow$ f è integrabile.
(conv. assoluta)

MODIFICHIAMO L'ESEMPIO

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin(x)}{x^{3/2}} = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}}$$

RAGIONIAMO COME PRIMA

$$|f(x)| \leq \frac{\sin(x)}{x^{3/2}} = g(x)$$

è INTEGRABILE ?? SÌ PERCHÉ

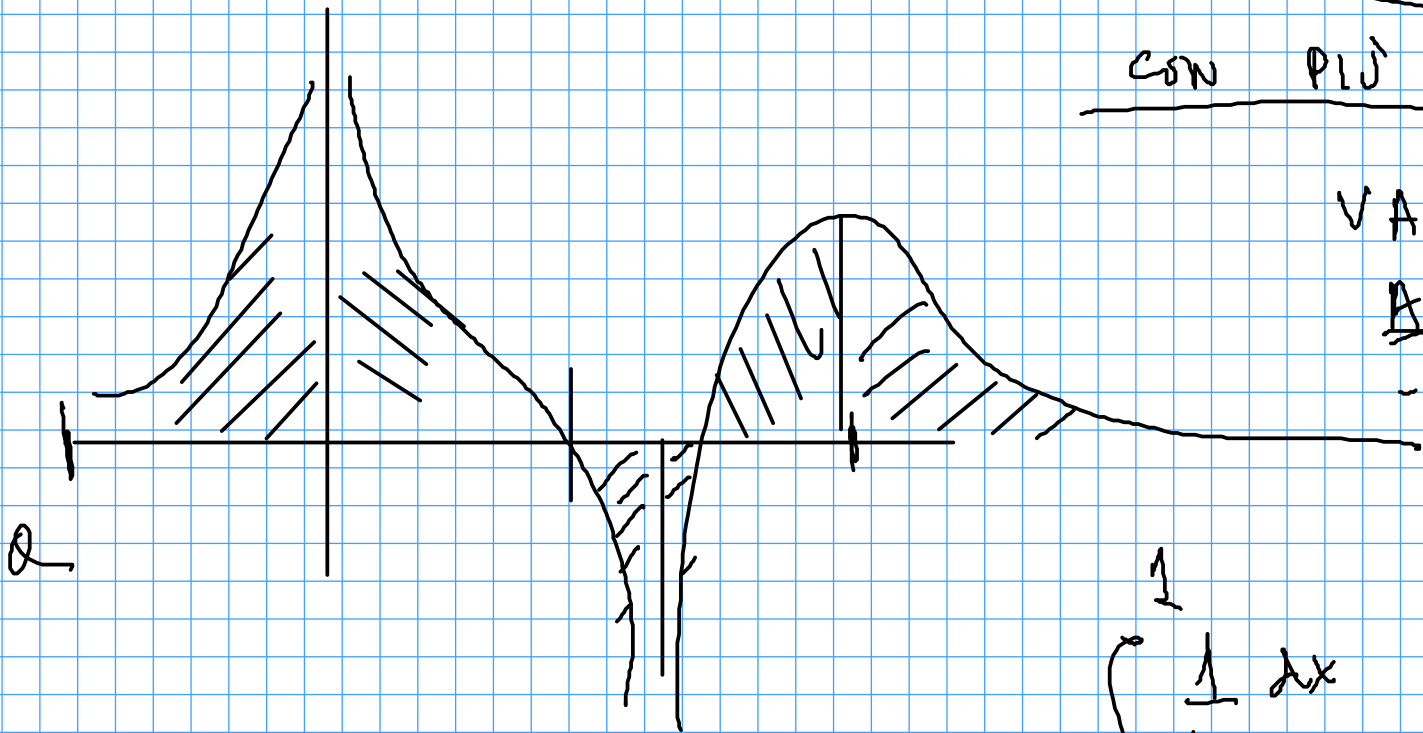
$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{1/\sqrt{x}} \to 1 \Leftrightarrow g(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

INTEGRABILE PERCHÉ È $\frac{1}{x^{1/2}}$ $1/2 < 1$

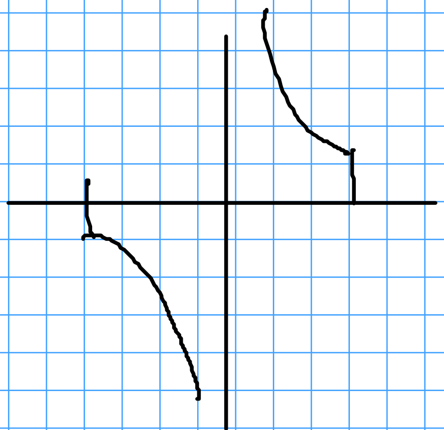
$\Rightarrow$ g INT. (confronto asintotico) $\Rightarrow$ f int. (conv. assoluta)

INTEGRALE IMPROPRIO CON PIÙ SINGOLARITÀ



VA FATTO UN PEZZO ALLA VOLTA E I PEZZI DEVONO ESSERE FINITI

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$ NON ESISTE



PERCHÉ

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x} = +\infty$$