ANALISI 1 [1]
QUINDICESIMA LEZIONE
Serie

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Ci proponiamo ora di formalizzare l'idea di "somma infinita".

Definizione

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.
Per n intero chiamiamo somma parziale n-esima la somma finita

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Chiameremo serie degli a_n la successione $\{S_n\}$ delle somme parziali. Diremo inoltre che a_n è il termine generale della serie.

Definizione

Diremo che la serie degli a_n è

- *convergente* se $\{S_n\}$ *ha limite finito;*
- *divergente* se $\{S_n\}$ *ha limite infinito;*
- *irregolare o indeterminata* se $\{S_n\}$ *non ha limite.*

Definizione

Se la serie è convergente oppure divergente chiameremo **somma** *della serie degli* a_n *il suo limite, cioè* $\lim_{n\to\infty} S_n$, *che verrà indicato con il simbolo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Osservazione

- $\{a_n\}$ *e* $\{S_n\}$ *SONO SUCCESSIONI DIVERSE!!*
- *Il simbolo* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *viene spesso usato anche per indicare la serie – cioè la* $\{S_n\}$ *– oltre che la somma (capiremo dal contesto - hopefully)....*
- *La somma non esiste se la serie è indeterminata.*
- *Se la successione* $\{a_n\}$ *non parte da zero, ma da un generico* n_0 *si danno definizioni analoghe, usando* n_0 *al posto di* 0.

Teorema (condizione necessaria)

Sia $\{a_n\}$ una successione. Se la serie degli a_n è convergente, allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

DIM Come vedremo (serie armonica) tale condizione NON È sufficiente.
Per avere la convergenza della serie il termine generale a_n deve tendere a zero ABBASTANZA RAPIDAMENTE.

Esempi

- *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *(di Mengoli) è convergente e ha somma* 1;
- *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)}$ *è divergente a* $+\infty$;
- *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ *è indeterminata e quindi non ha una somma.*

VERIFICHE

Osservazione

Il carattere di una serie di termine generale a_n dipende da "cosa fa a_n definitivamente". Formalmente se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni che sono definitivamente eguali, cioè tali che esiste $\bar{n}$ per cui

$$a_n = b_n \quad \forall n \geq \bar{n}$$

allora la serie degli a_n converge/diverge/è irregolare se e solo se la serie dei b_n converge/diverge/è irregolare.
Osserviamo peraltro che, mentre la convergenza è una questione di "n grandi" lo stesso non vale per la somma: se due successioni differiscono anche per un solo termine la loro somma è, in generale, diversa.

Osservazione

Se $\{a_n\}$ è una successione tale che la serie di termine a_n è convergente possiamo definire la successione delle ridotte

$$R_h := \sum_{n=h}^{\infty} a_n$$

Non è difficile infatti vedere che la serie scritta sopra converge.
Allora si ha

$$\lim_{h \to \infty} R_h = 0$$

(le ridotte tendono a zero)

Osservazione (serie telescopica)

Se, come nell'esempio della serie di Mengoli, si riesce a scrivere

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

allora è chiaro che, per $n \geq 0$ si ha

$$S_n = b_{n+1} - b_0$$

da cui la serie degli a_n ha lo stesso carattere della successione dei b_n e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_0 = \lim_{n\to\infty} b_n - b_0 \qquad \textit{se } \{b_n\} \textit{ ha limite.}$$

Conseguenza

Sia β un numero reale diverso da zero. Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)^{\beta}-n^{\beta}\right)=+\infty \qquad se\ \beta>0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((n+1)^{\beta}-n^{\beta}\right)=-1 \qquad se\ \beta<0$$

Notiamo che:

$$a_n:=\left((n+1)^{\beta}-n^{\beta}\right)=n^{\beta}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta}-1\right)=\beta n^{\beta-1}+o\left(n^{\beta-1}\right)\to 0$$

Ne deduciamo che per $0<\beta<1$ la successione a_n è infinitesima (dell'ordine di $\dfrac{1}{n^{1-\beta}}$) ma la serie degli a_n risulta divergente.
In effetti la serie comincia a convergere quando diventa infinitesima di ordine $\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha=1-\beta>1$ (corrispondente a $\beta<0$ - in questo discorso non si può prendere $\beta=0$).

Analogamenente

Conseguenza

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = +\infty$$

Anche qui possiamo notare che

$$a_n := \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$

e quindi abbiamo un altro esempio di successione infinitesima (stavolta dell'ordine di $\frac{1}{n}$) la cui serie risulta positivamente divergente.

Definizione (Serie geometrica)

Sia A un numero reale.

- *la successione* $\{A^n\}_{n\geq 0}$ *si chiama progressione geometrica di ragione* A;
- *la serie degli* A^n *si chiama serie geometrica di ragione* A.

Teorema (Carattere della serie geometrica)

Sia A un numero reale. Allora la serie geometrica di ragione A è

- *convergente, se* $-1 < A < 1$
- *divergente a* $+\infty$ *se* $A \geq 1$
- *irregolare se* $A \leq -1$.

Inoltre se $-1 < A < 1$ *(cioè se* $|A| < 1$*) si può calcolare la somma:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \frac{1}{1-A}$$

DIM

Serie a termini positivi

Teorema

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri non negativi: $a_n \geq 0$ per ogni n.
Allora la serie degli a_n NON PUÒ essere indeterminata.
Dunque la somma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ esiste sempre, finita o alla peggio $+\infty$.

Dim.

Basta notare che, se $a_n \geq 0$, allora le somme parziali sono crescenti:

$$S_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

e applicare il teorema di esistenza del limite per le successioni monotone. $\square$

Dunque per le serie a termini positivi possiamo SEMPRE scrivere la somma e

$$\text{la serie degli } a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow .\sup_n \sum_{k=0}^{n} a_k < +\infty.$$

Criteri di convergenza per serie a termini positivi

In generale è DIFFICILE trovare esplicitamente la somma di una serie (vedi la serie armonica).
Il problema delle serie è allora di STABILIRNE IL CARATTERE – dire cioè se la serie converge/diverge/è irregolare.
Dato che le serie a termini positivi ammettono sempre la somma per esse è più facile studiare la convergenza, mediante dei CRITERI che ora esaminiamo.

Teorema (Criterio del confronto)

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successione di numeri non negativi. Supponiamo

$$a_n \leq b_n \qquad \textit{definitivamente}$$

- *Se la serie dei b_n converge, allora la serie degli a_n converge;*
- *Se la serie degli a_n diverge, allora la serie dei b_n diverge.*

Dim.

Consideriamo solo il caso in cui la disuguaglianza è vera per ogni n.
Dato che i termini sono non negativi le somme esistono.
Da $a_n \leq b_n \quad \forall n$ si deduce

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \sum_{k=0}^{n} b_k$$

da cui

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

da cui segue immediatamente la tesi. $\square$

Teorema (Criterio del confronto asintotico)

Siano $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *due successione di numeri non negativi. Supponiamo che*

$$\textit{esista} \quad l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \qquad (\in [0, +\infty])$$

- *Se* $l \in]0, +\infty[$, *la serie degli* a_n *e quella dei* b_n *hanno lo stesso carattere:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty$$

  Notiamo che in questo caso $\{a_n\}$ *e* $\{l \cdot b_n\}$ *sono asintotiche.*

- *Se* $l = 0$ *(risp.* $l = +\infty$*) allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \quad \left(\textit{risp.} \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n < +\infty \right)$$

Serie armonica

Definizione

La serie di termine generale $\dfrac{1}{n}$ *si chiama serie armonica.*

Più in generale, dato α *reale, la serie di termine generale* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *si chiama serie armonica (generalizzata) di ordine* α.

Teorema (Caratttere della serie armonica)

Sia α *un numero reale. Allora la serie armonica di ordine* α *converge se e solo se* $\alpha > 1$. *Dato che* $\frac{1}{n^\alpha} \geq 0$ *possiamo scrivere:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

In particolare la serie armonica è divergente.

DIM (confronto asintotico con $b_n = (n+1)^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}$)