Le serie di potenze

$$\sum a_n z^n$$

andrebbe studiata per $z \in \mathbb{C}$ $\quad (a_n \in \mathbb{C})$

($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge $\Leftrightarrow$ $z_n = a_n + i b_n$ e

$\sum a_n$, $\sum b_n$ convergono separatamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad)$$

Nel caso delle serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ si vede che

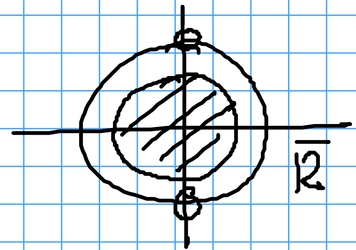
- la serie converge puntualmente se $|z| < \bar{R}$ dove

$$\bar{R} = \left(\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}$$

- la serie converge uniformemente su ogni disco $D_R = \{ |z| \leq R \}$, $R < \bar{R}$

- La serie non converge in nessun z con $|z| > R$

- Non si può dire nulla sugli z con $|z| = R$



Nell'esempio $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = \frac{1}{1+z^2} = f(z) \qquad |z| < 1$

SI CAPISCE ORA CHE $f(z)$ DIVENTA SINGOLARE in $z = \pm i$

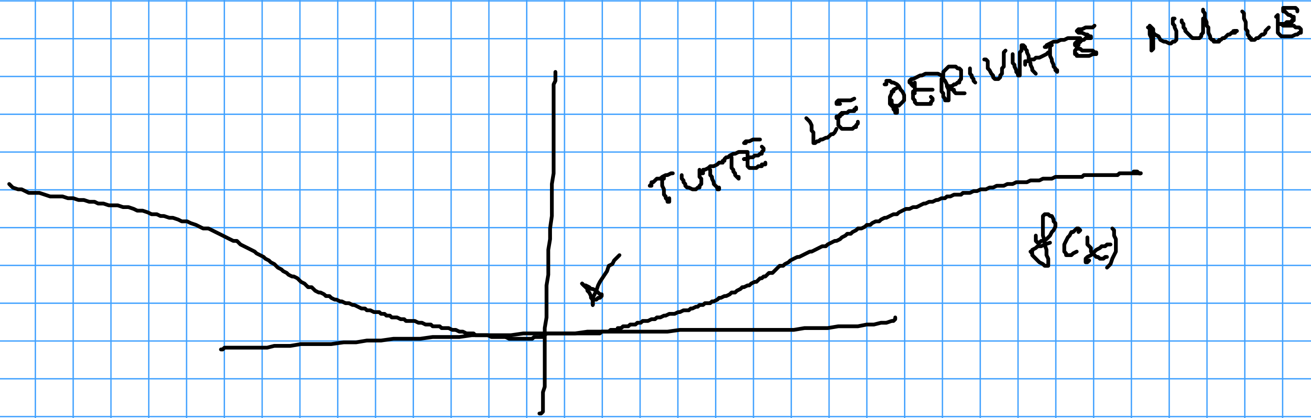
MENTRE VISTA IN $\mathbb{R}$ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è regolare $\forall x$

(CONTRO) ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$\forall n$ INTERO

$$f(x) = o(x^n)$$



La serie di Taylor ha tutti coefficienti nulli

$\Rightarrow$ $f(x) \neq$ sua serie di Taylor $\forall x \neq 0$

NOTA Se mi metto in $\mathbb{C}$ e faccio $\lim_{y \to 0} f(iy) = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2}}$

trovo infinito

OSS. Data una serie di funzioni

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

supponiamo che sia totalmente convergente su $[a,b]$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \quad \text{dove} \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f_n(x)| \right)$$

Allora per ogni x di $[a,b]$

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^{k} f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) \right| \le \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(x)| \le$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|f_n\|_\infty$$ → SE CONOSCO QUESTA SERIE POSSO VALUTARE L'ERRORE

RISOLUZIONE "PER SERIE" DI EQ. DIFF.

Esempio elementare

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = A \qquad y'(0) = B \end{cases}$$

Cerco $\quad y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n \quad$ Formalmente:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, n \, x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} y_n \, n(n-1) \, x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} y_{n+2} (n+2)(n+1) x^n$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(y_{n+2} (n+2)(n+1) + y_n \right) x^n = 0$$

$$y_{n+2} = \frac{-\, y_n}{(n+1)(n+2)} \qquad y_0 = A \,, \quad y_1 = B$$

$y_0 = A \qquad y_2 = \frac{-A}{1 \cdot 2} \qquad y_4 = \frac{A}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4}$

$y_6 = \frac{A}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{-1}{5 \cdot 6} \quad \ldots \qquad y_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} A$

(se vogliamo la dim. per induzione)

Analogamente

$y_1 = B \qquad y_3 = \frac{-B}{2 \cdot 3}, \qquad y_5 = \frac{B}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \ldots$

$$y_{2k+1} = \frac{(-1)^k B}{(2k+1)!}$$

$$y(x) = A \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(x)} + B \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(x)}$$

BESSEL

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - N^2) y = 0 \qquad (B)$$

Suppongo
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, n \, x^{n-1} \qquad\qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} y_n \, n(n-1) \, x^{n-2}$$

$$0 = x^2 y'' + x y' + x^2 y - N^2 y =$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} y_n \, n(n-1) \, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \, n \, x^n - \sum_{n=0}^{\infty} N^2 y_n x^n +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^{n+2}}_{\sum_{n=2}^{\infty} y_{n-2} x^n} \iff$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \Big[\underbrace{\big(n(n-1) + n - N^2 \big)}_{n^2 - N^2} y_n + y_{n-2} \Big] x^n + y_1 x - N^2 y_0 + - N^2 y_1 x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} (n^2 - N^2)\, y_n + y_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \\ y_1 (1 - N^2) = 0 \ , \quad N^2 y_0 = 0 \end{array}}$$

$$\overset{??}{\Longleftrightarrow} \qquad y_n = \frac{-\,y_{n-2}}{(n+N)(n-N)}$$

ATTENZIONE AL DENOMINATORE

$$y_1 (1 - N^2) = 0 \qquad y_0 N^2 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (n^2 - N^2)\, y_n + y_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \\ y_1 (1 - N^2) = 0 \ , \quad N^2 y_0 = 0 \end{array}}$$

Caso $N=0$ $\quad y_0$ lo posso scegliere arbitrariamente

$\Rightarrow$ posso ricavare tutti i termini y_m con m pari

$$(N=0) \longrightarrow y_m = -\frac{y_{m-2}}{m^2} \qquad m \geq 2$$

(sono tutti $\neq 0$ se $y_0 \neq 0$)

$$y_0 , \quad y_2 = -\frac{y_0}{4} , \quad y_4 = -\frac{y_0}{4}\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{y_0}{4^2 \cdot 4}$$

$$y_6 = -\frac{y_0}{4^2 \cdot 4} \frac{1}{\underset{4 \cdot 3^2}{6^2}} = \ldots$$

$$\boxed{y_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}}$$

si può dim. per ind.

E i termini dispari ?? TUTTI NULLI !!

$$y_1 = 0 \qquad y_n = \frac{-y_{n-2}}{n^2} \quad \Rightarrow \quad y_n = 0$$

$\forall n$ dispari

TROVO

$$y(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2} x^{2k}$$

se metto $y_0 = 1$ chiamo $J_0(x) =$

J_0 = funzione di Bessel di ordine zero.

Si vede facilmente che il raggio di conv. è $+\infty$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}}_{a_k} (x^2)^k$$

, applico il criterio del rapporto

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \longrightarrow 0$$

L'EQ. È DI ORDINE 2, MA ABBIAMO TROVATO

$y(x) = \lambda J_0(x)$ — MANCANO DELLE SOLUZIONI CHE DIVERGONO IN ZERO