Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

Nona-Dodicesima Lezione
Alcune equazioni della Fisica Matematica

[1] prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

L’equazione del calore unidimensionale

Consideriamo una sbarra di lunghezza $L > 0$ fissata. Vogliamo studiare la *distribuzione della temperatura* in ogni punto della sbarra.

Indicheremo con x il generico punto della sbarra $(0 \leq x \leq L)$ e con t un istante di tempo; per motivi che vedremo sarà $t \geq 0$.

L’incognita del nostro problema sarà $\boxed{u(t,x)}$ che indicherà, per l’appunto, la temperatura all’istante t e nella posizione x.

Supporremo di conoscere la distribuzione della temperatura all’istante iniziale $t = 0$, data da una funzione $\boxed{u_0(x)}$; ammetteremo anche che la sbarra sia sottoposta ad un irraggiamento noto di calore, dato da un’assegnata funzione $\boxed{f(t,x)}$.

Per studiare il problema useremo i seguenti principi:

- in ogni punto della sbarra c'è una quantità di calore (di energia termica) $q(t,x)$; a rigore si tratta di una "densità" di energia di modo che l'energia contenuta in una porzione di sbarra $\{a \leq x \leq b\}$ sbarra all'istante t è

$$Q(t,a,b) = \int_a^b q(t,x)\,dx$$

- la densità di calore $q(t,x)$ è proporzionale alla temperatura:

$$q(t,x) = c(x)\sigma(x)u(t,x)$$

  dove $c(x)$ è la "capacità termica specifica" e $\sigma(x)$ è la densità;
- il calore (l'energia) si sposta dalle zone più calde a quelle più fredde con velocità proporzionale alla differenza di temperatura (legge di Fourier): il calore che attraversa un punto a è proporzionale a $-k(a)\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,a)$ dove $k(a)$ è la "conducibilità termica" nel punto a;
  allora (aggiungendo il contributo della sorgente esterna):

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t,a,b) = \left(k(b)\frac{\partial}{\partial x}u(t,b) - k(a)\frac{\partial}{\partial x}u(t,a)\right) + \int_a^b f(t,x)\,dx$$

Derivando l'ultima relazione rispetto a $b = x$ e inserendo la prima

$$c(x)\sigma(x)\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}q(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x)\right) + f(t,x)$$

Se prendiamo per semplicità c, σ e k costanti (sbarra omogenea) troviamo l'equazione **alle derivate parziali**, detta *equazione del calore*

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x), \quad t > 0, x \in [0,L]. \tag{Eq.Cal.}$$

(ci sarebbe anche una costante a moltiplicare f, che supponiamo eguale a uno nonostante sia fisicamente importante ...).
Oltre all'equazione abbiamo delle condizioni su $u(t,x)$ – la prima riguarda la distribuzione iniziale della temperatura, $\boxed{u(0,x) = u_0(x) \text{ per } 0 \leq x \leq L}$ – oltre a questa dobbiamo "dichiarare" quali scambi di calore avvengano agli estremi 0 ed L (per tutti i tempi $t \geq 0$). Tradizionalmente si considerano **due casi**.

1. **temperatura assegnata agli estremi** Si impone che $\boxed{u(t,0) = u(t,L) = 0 \text{ per ogni } t \geq 0}$.
   Si suppone in sostanza che ci sia un dispositivo esterno che ceda o prelievi calore dalla sbarra in modo da tenere gli estremi a temperatura costante (zero per semplicità, ma si potrebbe anche imporre che $u(t,0) = v_1(t)$ e $u(t,L) = v_2(t)$ per due assegnate v_1 e v_2).
   Si può per esempio immaginare che la sbarra abbia gli estremi "immersi in un blocco di ghiaccio" (piuttosto grosso).
2. **assenza di scambi di calore con l'esterno** In questo caso la condizione è $\boxed{\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,L) = 0}$.
   Si può immaginare la sbarra nel vuoto o incernierata in due supporti di ceramica – anche in questo caso si potrebbe considerare una condizione più generale $\frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = w_1(t)$ e $\frac{\partial}{\partial x}u(t,L) = w_2(t)$, dove w_1 e w_2 sono assegnate, supponendo di poter prescrivere ad ogni $t \geq 0$ quali siano gli scambi di calore in 0 ed L.

Si potrebbe anche considerare una sbarra saldata agli estremi (un anello).
In questo caso bisogna imporre una *condizione di periodicità*:

$$\boxed{u(t,0) = u(t,L) \text{ e } \frac{\partial}{\partial x}u(t,0) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,L)}$$

(quello che esce da una parte rientra dall'altra).

In tutte le situazioni descritte il problema diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = c\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(t,x) & t \geq 0, 0 \leq x \leq L, \\ u(0,x) = u_0(x) & 0 \leq x \leq L, \\ \text{condizioni agli estremi } 0 \text{ e } L & t \geq 0. \end{cases}$$

Vediamo come si può trattare il caso con temperatura zero agli estremi mediante le serie di Fourier.

IDEA

Cerchiamo $u(t,x)$ del tipo

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(k\omega x)$$

(serie di Fourier in soli seni, rispetto alla variabile spaziale x), dove $\omega = \dfrac{\pi}{L}$.

Si può sperare che, se si riesce a trovare una $u(t,x)$ di questo tipo che risolva l'equazione e verifichi la condizione iniziale, essa verifichi automaticamente la condizione di essere nulla agli estremi (in quanto serie di funzioni con questa proprietà !!!).

Per seguire ques'idea supponiamo che il dato iniziale u_0 e la sorgente $f(t,\cdot)$ (per ogni $t \geq 0$) abbiano energia finita, per cui:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x), \quad f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega x).$$

Supponendo di poter derivare per serie:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin(n\omega x),\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\omega^2)u_n(t)\sin(n\omega x).$$

e scrivendo l'equazione componente per componente:

$$u_n'(t) = -n^2\omega^2 u_n(t) + f_n(t)$$

da cui:

$$u_n(t) = e^{-\omega_0^2 n^2 t}\left(u_n(0) + \int_0^t f_n(\tau)e^{n^2\omega^2\tau}\,d\tau\right) =$$

$$A_n e^{-\omega_0^2 n^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)e^{-n^2\omega^2(t-\tau)}\,d\tau.$$

Questi calcoli **individuano univocamente** i coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$. Vediamo ora se quella che abbiamo trovato è effettivamente una soluzione del nostro problema.

Per non complicare troppo i calcoli consideriamo solo il caso senza sorgenti: $\boxed{f(t,x) = 0}$. Quindi consideriamo

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x). \qquad (\star)$$

- Per ogni $t \geq 0$ $u(t,\cdot)$ ha energia (spaziale) finita.
- Per ogni $t > 0$ e ogni x in $[0,L]$ $u(t,x) = 0$.
- Per ogni $t > 0$ $u(t,\cdot)$ è derivabile infinite volte in ogni x e

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h} u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega^2 n^2 t} \frac{\partial^h}{\partial x^h} \sin(n\omega x);$$

in particolare per $h = 2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega^2 n^2 t} (-n^2\omega^2) \sin(n\omega x) \qquad \forall x \in [0,L].$$

- Per ogni $t > 0$ e per ogni x $u(t,\cdot)$ è derivabile infinite volte in t e

$$\frac{\partial^h}{\partial t^h}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\partial^h}{\partial t^h} e^{-\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (-n^2\omega^2)^h e^{-\omega^2 n^2 t} \sin(n\omega x);$$

in particolare per $h = 1$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\omega^2 n^2 t}(-n^2\omega^2)\sin(n\omega x) \qquad \forall x \in [0,L].$$

Dunque $\boxed{u(t,x) \text{ risolve l'equazione e verifica la condizione agli estremi}}$.

NOTA

Anche se il dato iniziale è solo L^2, la soluzione diventa immediatamente regolarissima a qualunque tempo positivo

- Per $t > 0$ poniamo $\boxed{u_t(x) = u(t,x)}$. Allora

$$\lim_{t \to 0^+} \|u_t - u_0\|_2 = 0$$

cioè $u_t \xrightarrow{L^2} u_o$ per $t \to 0^+$; possiamo dire che $\boxed{u(t,x) \text{ verifica la condizione iniziale “nel senso dell'energia”}}$.

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty$ (da cui segue che u_0 è continua), allora $u(t,x)$ è continua anche per $t = 0$ e $u(0,x) = u_0(x)$; anzi $u_t \to u_0$ uniformemente per $t \to 0^+$.
- u_t tende uniformemente a zero per $t \to +\infty$. La temperatura dunque tende a distribuirsi uniformemente nella sbarra.

Alcune caratteristiche dell'equazione del calore

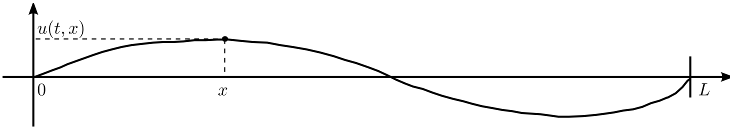
- Regolarizzazione immediata delle soluzioni
- Impossibilità di risolvere all'indietro (in generale)
- Velocità di propagazione infinita
- Confrono tra soluzioni: $u_0(x) \geq v_0(x) \Rightarrow u(t,x) \geq v(t,x)$ per $t \geq 0$

L'equazione delle onde

Come abbiamo detto all'inizio del corso l'equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) + f(x,t) \qquad \text{(Eq.Corda)}$$

descrive il moto di una "corda elastica" (almeno per piccoli spostamenti dalla posizione di riposo $u(t,x) = 0$). La soluzione $u(t,x)$ va intesa come la posizione del punto $x \in [0,L]$ al tempo t. La costante c tiene conto delle proprietà elastiche e dalla densità della corda (che stiamo supponendo omogenea), mentre il termine $f(t,x)$ è legato ad un'eventuale forza esterna. L'equazione (Eq.Corda) è detta *equazione di d'Alembert*.



Dato che si suppone che la corda sia fissata agli estremi il problema verrà studiato con la condizione:

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(come vedremo si riuscirà a risolvere il problema per ogni tempo).
Dato che il problema è del secondo ordine rispetto al tempo (e dato ciò che ci dice l'intuizione riguardo alla corda) è spontaneo considerare in $t = 0$ delle **condizioni iniziali sulla posizione e sulla velocità**; il problema completo sarà:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = c^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + f(x,t) & \text{per } 0 \le x \le L, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 & \text{per } t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{per } 0 \le x \le L, \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(0,x) = v_0(x) & \text{per } 0 \le x \le L. \end{cases} \tag{Pq.Corda}$$

dove $f(t,x)$, $u_0(x)$ e $v_0(x)$ sono funzioni assegnate.

Come già fatto per l'equazione del calore cerchiamo la soluzione u della forma:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(n\omega x), \qquad \text{dove } \omega = \frac{\pi}{L},$$

supponendo che i termini noti del problema siano dati nello stesso modo:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x),\ v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega x),\ f(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(n\omega x).$$

Per motivi che saranno chiari conviene pensare che le funzioni sopra siano definite per $x \in \mathbb{R}$, siano dispari e siano periodiche di periodo $2L$ rispetto a x, cosicché **lo sviluppo in seni vale per ogni x reale**.

Ragionando formalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(t)\sin(n\omega x), \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n''(t)\sin(n\omega x),$$

mentre

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)n\omega\cos(n\omega x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = -\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)n^2\omega^2\sin(n\omega x).$$

da cui si ricavano le condizioni, per $n = 1, 2, \ldots$

$$u_n''(t) = -n^2c^2u_n(t) + f_n(t), \qquad u_n(0) = A_n, \quad u_n'(0) = B_n.$$

Stavolta abbiamo una equazione ordinaria di secondo ordine in $u_n(t)$. Anche qui consideriamo solo il caso $f(t,x) = 0$ (si potrebbe con un po' di pazienza trattare il caso generale).

La soluzione generale dell'equazione in u (con $f(t,x)=0$) è data da:

$$u_n(t) = \alpha\cos(nc\omega t) + \beta\sin(nc\omega t) \Rightarrow \\ u_n'(t) = -nc\omega\alpha\sin(nc\omega t) + nc\omega\beta\cos(nc\omega t), \quad (1)$$

da cui si ricava $\alpha = A_n$, $\beta = \frac{B_n}{nc\omega}$. Quindi:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(nc\omega t) + \frac{B_n}{nc\omega}\sin(nc\omega t)\right)\sin(n\omega x) = \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}(\sin(n\omega(x+ct)) + \sin(n\omega(x-ct)) - \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{2n\omega}(\cos(n\omega(x+ct)) - \cos(n\omega(x-ct)) = \\ \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{V_0(x+ct)-V_0(x-ct)}{2c}$$

dove V_0 la funzione data da $V_0(s) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n\omega}\cos(n\omega s)$.

Notiamo che la funzione $V_0(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \cos(n\omega s)$ verifica

$$V_0'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n n\omega}{n\omega} \sin(n\omega s) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega s) = v_0(s)$$

e ha integrale nullo su $[0, L]$, infatti:

$$\int_0^L V_0(s)\, ds = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n\omega} \int_0^L \cos(n\omega s)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n^2\omega^2} \left[\sin(n\omega s)\right]_0^L s = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0;$$

Queste due proprietà individuano univocamente $V_0(s)$ (anche senza ricorrere allo sviluppo in serie di Fourier)

$$V_0(s) = \int_0^s v_0(\sigma)\, d\sigma - \int_0^L v_0(\sigma)\, d\sigma \qquad 0 \leq s \leq L$$

"disparizzata" e "periodicizzata di periodo $2L$".

Abbiamo in sostanza **trovato una formula** per la soluzione di (Pq.Corda)

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct)+u_0(x-ct)}{2} + \frac{V_0(x+ct)-V_0(x-ct)}{2c} \qquad \text{(Sol.Corda)}$$

In questo caso la serie di Fourier non è così determinante, dato che se ne può fare a meno per descrivere la soluzione. È però importante il metodo, visto che (come vedremo) quando si passa dalle corde alle membrane (due variabili spaziali) la formula non si trova più.
Notiamo che la formula sopra si può anche scrivere:

$$u(t,x) = w_1(x+ct) + w_2(x-ct)$$

(con le ovvie definizioni). Questo si interpreta dicendo che la soluzione è la sovrapposizione di **due "onde"** (una data da w_1 e una da w_2) **che translano in direzioni opposte con velocità** c

Osservazione

La funzione $u(t,x)$ data dalla formula (Sol.Corda) *non è derivabile se u_0 e v_0 non lo sono, dunque in generale $u(t,x)$ non risolve l'equazione "in senso tradizionale". è però ragionevole considerarla in ogni caso "soluzione in senso generalizzato".*

Caratteristiche dell'equazione delle onde

- Non c'è regolarizzazione - per ogni t la soluzione $u(t,x)$ ha le stesse caratteristiche dei dati iniziali u_0, v_0.
- Si può risolvere indifferentemente in avanti e all'indietro
- C'è una velocità di propagazione finita (e pari a c): se si modificano i dati u_0 e v_0 in $[-\delta,\delta]$ la soluzione al tempo t cambia solo in $[-\delta-ct,\delta+c\delta]$.