Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

SESTA e SETTIMA Lezione
Serie di Fourier

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

La serie di Fourier

In tutto quanto segue considereremo:

$$\boxed{T > 0} \quad (\textit{periodo}), \qquad \boxed{\omega_0 := \frac{2\pi}{T}} \quad (\textit{frequenza angolare})$$

Inoltre (almeno all'inizio) considereremo delle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dove $\mathbb{C}$ indica i numeri complessi, con la condizione di T-periodicità

$$f(t+T) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dato n intero relativo indicheremo con $e_n : [0,T] \to \mathbb{C}$ la funzione T-periodica definita da:

$$e_n(t) := e^{in\omega_0 t}$$

Cercheremo di esprimere una generica funzione T-periodica f come una combinazione degli e_n - dato che n varia in $\mathbb{Z}$ cercheremo quindi di trovare dei coefficienti c_n, con n che varia in $\mathbb{Z}$ tali che:

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e_{-n}$$

Osservazione

Si ha (se $z \in \mathbb{C}$ $\bar{z}$ indica il coniugato di z)

$$\int_0^T e_n(t)\overline{e_m(t)}\,dt = \begin{cases} 0 & se\ n \neq m, \\ T & se\ n = m. \end{cases}$$

Esprimiamo questo fatto dicendo che le funzioni e_n sono ortogonali (rispetto al "prodotto scalare" $f \cdot g := \int_0^T f(x)\overline{g(x)}\,dx$). VERIFICA IDEA

Definizione

Data una funzione f T-periodica poniamo:

$$f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k(t) \qquad dove\ c_k := \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega_0 t}\,dt.$$

Chiameremo f_n il polinomio trigonometrico di Fourier di f di ordine n e chiameremo coefficienti di Fourier complessi in numeri c_k.

Osservazione

In tutti i discorsi che seguono useremo in maniera "disinvolta" la nozione di integrale, dando per buono varie proprietà che richiederebbero in realtà un'estensione del solito integrale di Riemann.

La prima questione che ci poniamo è se la successione dei polinomi di Fourier converga alla funzione di partenza, e in che senso ciò eventualmente avvenga.

Ci si potrebbe aspettare che la continuità di f sia una condizione naturale per la convergenza - ciò NON 'E vero. Si potrebbe dimostrare che esistono funzioni continue la cui serie di Fourier non converge in nessun punto !!!

Vediamo cosa si può ottenere aggiungendo delle ipotesi di derivabilità.

Convergenza puntuale della serie di Fourier

Teorema

Se f è una funzione T-periodica, se t_0 un punto con le seguenti proprietà:

- *f derivabile in un intorno sinistro $]t_0-\delta, t_0[$ e in un intorno destro $]t_0, t_0+\delta[$,*
- *f' continua e limitata sia in $]t_0-\delta, t_0[$ che in $]t_0, t_0+\delta[$,*

allora esistono finiti i limiti destro e sinistro in t_0

$$f(t_0^-) := \lim_{t\to t_0^-} f(t), \qquad f(t_0^+) := \lim_{t\to t_0^+} f(t)$$

e i polinomi di Fourier in t_0 tendono alla media tra $f(t_0^-)$ e $f(t_0^+)$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$$

Teorema

Supponiamo che f sia T-periodica e abbia derivata prima continua. Allora $f_n \to f$ uniformemente su $[0,T]$.

DIM. (nel caso di esistenza della derivata seconda)

Osservazione

Dal primo dei teoremi precedenti segue in particolare che f univocamente determinata a partire dai suoi coefficienti di Fourier.
Più precisamente Se f e g sono T-periodiche ed esistono un numero finito di punti $t_1,\dots,t_k$ in $[0,T]$ tali che f e g sono derivabili con derivata limitata in $[0,T]\setminus\{t_1,\dots,t_k\}$, e se f e g hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora $f(t)=g(t)$ per ogni t in $[0,T]\setminus\{t_1,\dots,t_k\}$.

Spesso si incontra il problema "inverso": dati dei coefficienti c_k si si può chiedere se la serie di Fourier ottenuta da tali coefficienti definisca una funzione. I seguenti teoremi rispondono (parzialmente) a questo problema.

Teorema

Sia $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di numeri complessi e indichiamo con* f_n *i polinomi trigonometrici associati ai* c_k*:* $f_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{-i\omega_0 kt}$.

- *Se* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$ *allora esiste una funzione continua e* T*-periodica* f *tale che* f_n *converge uniformemente a* f. *Inoltre i coefficienti di Fourier di* f *sono esattamente i numeri* c_k *di partenza.*
- *Se* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n|c_n| < +\infty$, *allora* f *è derivabile,* f *ed* f' *sono continue e* T*-periodiche. Inoltre* f_n *converge uniformemente a* f, f_n' *converge uniformemente a* f', *da cui*

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i\omega_0 n e^{-i\omega_0 nt}.$$

DIM

Osservazione

In maniera analoga si può considerare il problema della regolarità delle derrivate successive alla prima.

- *Dato un intero h, se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^h |c_n| < +\infty$, allora f ha derivate fino alla h-esima continue e T periodiche. Inoltre per ogni $j = 0, 1, \ldots, h$ si ha che $f_n^{(j)}$ converge uniformemente a $f^{(j)}$ da cui*

$$f^{(j)}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i^j \omega_0^j n^j e^{-i\omega_0 nt}.$$

Caso reale: sviluppi in seni e coseni

Osservazione

Supponiamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia in T-periodica a valori reali. Siano c_k i coefficienti di Fourier di f. Allora

$$Tc_{-k} = \int_0^T f(t) e^{ik\omega_0 t}\, dt = \int_0^T f(t) \overline{e^{-ik\omega_0 t}}\, dt = \overline{\int_0^T f(t) e^{-ik\omega_0 t}\, dt} = T\overline{c_k}$$

cioè $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Si potrebbe dimostrare che vale anche il viceversa e quindi

$$\boxed{c_{-k} = \overline{c_k} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow f \text{ reale}}$$

Vediamo ora una forma reale della serie di Fourier nel caso di f reale.

Formalmente:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_k e_k = c_0 e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_k e_k + c_{-k} e_{-k}) = c_0 e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_k e_k + \overline{c_k e_k}) =$$

$$c_0 e_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re e(c_k e_k) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Re e(c_k) \cos(\omega_0 kt) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \Im m(c_k) \sin(\omega_0 kt)$$

$$= \boxed{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_k \sin(\omega_0 kt)}$$

dove:

$$\boxed{\begin{array}{rcccl} a_o = & c_0 & = & \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt & \quad \text{e per } k \geq 1: \\ a_k = & 2\Re e(c_k) & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(\omega_0 kt)\,dt & \\ b_k = & -2\Im m(c_k) & = & \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(\omega_0 kt)\,dt & \end{array} \qquad (1)}$$

Si ritrovano i risultati di convergenza del caso complesso.

Teorema

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione* T*-periodica e siano* $(a_k)_{k\geq 0}$, $(b_k)_{k\geq 1}$ *definiti in* (1). *Poniamo*

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(\omega_0 kt) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(\omega_0 kt). \tag{2}$$

Si ha che

- *se* f *derivabile in un intorno sinistro* $]t_0-\delta, t_0[$ *e in un intorno destro* $]t_0, t_0+\delta[$ *con* f' *continua e limitata sia in* $]t_0-\delta, t_0[$ *che in* $]t_0, t_0+\delta[$, *allora*
$$\lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2};$$
- *se* f *ha derivata seconda continua, allora* f_n *converge a* f *uniformemente*

Viceversa ...

Teorema

Supponiamo che $(a_k)_{k\geq 0}$ *e* $(b_k)_{k\geq 1}$ *siano due successioni di numeri reali tali che*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < +\infty.$$

Allora, definendo f_n *come in* (2), *esiste una funzione continua e* T*-periodica* f *tale che* f_n *converge uniformemente a* f. *Inoltre sviluppando tale* f *in serie di Fourier si ha che i coefficienti dati da* (1) *coincidono con gli* $(a_k)_{k\geq 0}$ *e* $(b_k)_{k\geq 1}$ *di partenza. Inoltre se* j *è un intero e se*

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^j |a_k| < +\infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^j |b_k| < +\infty.$$

si ha che la f *detta sopra ha derivata* j*-esima continua pari alla serie delle derivate.*

Osservazione

Un altro modo di vedere le cose nel caso di f a valori reali, è il seguente. Sia $k \neq 0$ e scriviamo $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$. Per le (1) si ha $a_k = 2\rho_k \cos(\theta_k)$ e $b_k = -2\rho_k \sin(\theta_k)$ e dunque

$$a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt) = 2\rho_k \cos(\omega_0 kt + \theta_k).$$

In sostanza il modulo del coefficiente c_k è legato all'ampiezza della componente (sinusoidale) $a_k \cos(\omega_0 kt) + b_k \sin(\omega_0 kt)$ mentre l'argomento di c_k è legato alla fase di tale componente.

Osservazione

Dato che le funzioni che consideriamo sono T-periodiche è facile vedere che i coefficienti di Fourier di f si possono ottenere come

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-i\omega_0 nt}\, dt$$

qualunque sia t_0 in $\mathbb{R}$ (e lo stesso discorso vale per gli a_n/b_n).

Teorema

Sia f in T-periodica. Allora

1. *f è reale se e solo se* $\boxed{c_{-k} = \overline{c_k}}$ *per ogni k;*
2. *f è pari se e solo se* $\boxed{c_{-k} = c_k}$ *per ogni k;*
3. *f è dispari se e solo se* $\boxed{c_{-k} = -c_k}$ *per ogni k;*
4. *f è reale pari se e solo se* $\boxed{c_{-k} = c_k \in \mathbb{R}}$ *per ogni k; questo è equivalente a dire che* $\boxed{b_k = 0}$ *per ogni k;*
5. *f è reale dispari se e solo se* $\boxed{c_{-k} = -c_k \in i\mathbb{R}}$ *per ogni k (cioè i c_k sono immaginari puri); questo è equivalente a dire che* $\boxed{a_k = 0}$ *per ogni k;*
6. *se $t_0 \in \mathbb{R}$ indichiamo con f_{t_0} la funzione translata di t_0 $f_{t_0}(t) := f(t - t_0)$; allora detti c_k^* i coefficienti di Fourier di f_{t_0} si ha* $\boxed{c_k^* = e^{-i\omega_0 t_0 k} c_k}$.

ALCUNE VERIFICHE

La serie di Fourier in L^2

In realtà l'ambientazione corretta per le serie di Fourier si trova tra le *funzioni a energia finita*. Diamo qualche idea – una teoria rigorosa richiederebbe strumenti avanzati (integrale secondo Lebesgue).

Definizione

Data una funzione $f : [0, T] \to \mathbb{C}$*, oppure una funzione* T*-periodica* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*, chiamiamo* *energia* *di* f *l'espressione (eventualmente infinita)*

$$\mathscr{E}(f) := \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

Introduciamo degli spazi di funzioni a energia finita:

$$L^2(0, T) = \{f : [0, T] \to \mathbb{C} : \mathscr{E}(f) < +\infty\}$$
$$L^2_T(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ f\ T\text{-periodica} : \mathscr{E}(f) < +\infty\}$$

Non c'ùna grossa differenza tra i due, ma sono oggetti formalmente diversi.

Nel seguito scriviamo L^2 per indicare uno tra i due spazi.

Definizione

Se $f \in L^2$ *definiamo la sua norma* L^2*:*

$$\|f\|_2 := \sqrt{\mathcal{E}(f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2 \, dt}$$

Se $f, g \in L^2$ *definiamo il loro prodotto scalare:*

$$\langle f, g \rangle := \int_0^T f(t)\overline{g(t)} \, dt$$

Teorema (disuguaglianza di Schwartz)

Se f e g sono in L^2_T allora $f\bar{g}$ integrabile e vale la disuguaglianza

$$\left|\int_0^T f(t)\bar{g}(t)\,dt\right|^2 \leq \int_0^T |f(t)|^2\,dt \int_0^T |g(t)|^2\,dt$$

che equivale a dire

$$|\langle f,g\rangle| \leq \|f\|_2\|g\|_2 \qquad \forall f,g \in L^2_T.$$

La disuguaglianza di Schwartz dice che il prodotto scalare ha le proprietà che ci si aspetta da lui. Per esempio permette di definire "l'angolo" θ tra due funzioni f e g in L^2_T mediante la relazione:

$$\cos(\theta) := \frac{\langle f,g\rangle}{\|f\|_2\|g\|_2}$$

Alcune proprietà

- $\langle f_1 + f_2, g_1 + g_2 \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle + \langle f_2, g_1 \rangle + \langle f_1, g_2 \rangle + \langle f_2, g_2 \rangle$;
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$;
- $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle, \quad \langle f, \beta g \rangle = \bar{\beta} \langle f, g \rangle$;
- $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$ da cui $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \langle f, g \rangle + \|g\|^2$;
- $\|f\|_2 = 0$ se e solo se $f = 0$ $(*)$
- $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \|f\|_2$
- $\|f + g\|_1 \leq \|f\| + \|g\|$ (disuguaglianza triangolare)

Osservazione

La disuguaglianza triagolare è una semplice conseguenza della disuguaglianza di Schwartz e implica che L^2 è uno spazio vettoriale, cioè che, se $f, g \in L^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, allora $\alpha f + \beta g \in L^2$

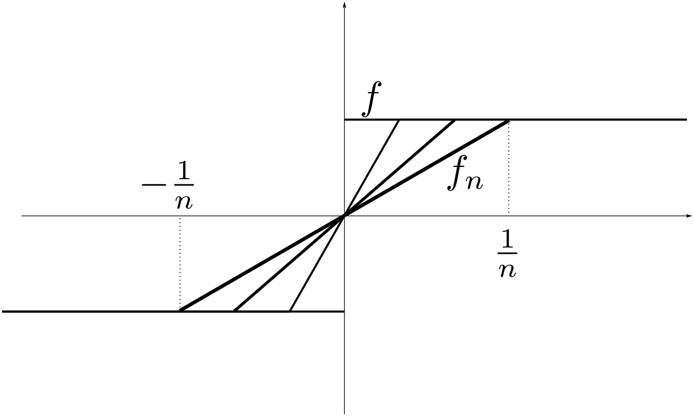
Osservazione

La norma della differenza $\|f-g\|_2$ *fornisce una valutazione della "distanza tra le due funzioni* f *e* g*". Tale distanza è "misurata in energia", quindi mediante un integrale (a differenza della norma uniforme).*
Una volta definita la distanza si può dire che una successione di funzioni (f_n) *converge in* L^2 *a una funzione* f *se* $\|f_n-f\|_2 \to 0$*. Questa convergenza è diversa dalla convergenza uniforme ed è "più debole" (cosa che può essere un difetto ma anche un pregio). Per esempio se*

$$f(x)=\begin{cases}1 & se\ x>0,\\ 0 & se\ x=0,\\ -1 & se\ x<0\end{cases}, \quad f_n(x)=\begin{cases}1 & se\ x>\frac{1}{n},\\ nx & se\ |x|\leq\frac{1}{n},\\ -1 & se\ x<-\frac{1}{n}\end{cases}$$

si può verificare abbastanza facilmente che $f_n \xrightarrow{L^2} f$*, cioè che* $\|f_n-f\|_2\to 0$*, ma che* f_n *NON converge uniformemente a* f*.*

VEDI FIGURA


f
$-\frac{1}{n}$
f_n
$\frac{1}{n}$

Osservazione

Il prodotto scalare introduce una nozione di "ortogonalità" tra funzioni di L^2_T. Tale nozione è proprio quella per cui, se $e_k(t) = e^{i\omega kt}$ si ha:

$$\langle e_k, e_h \rangle = 0 \text{ se } h \neq k, \qquad \|e_k\| = \sqrt{T}$$

Inoltre se $f \in L^2_T$, allora i coefficienti di Fourier c_k di f sono ben definiti e si ha $c_k = \dfrac{\langle f, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle} = \dfrac{\langle f, e_k \rangle}{\|e_k\|_2^2}$.

L'idea che ci proponiamo di illustrare è la seguente:

gli e_k, al variare di k in $\mathbb{Z}$ costituiscono una base ortonormale per L^2

Definizione

Per n in $\mathbb{N}$ *poniamo*

$$E_n := \left\{ \sum_{k=-n}^{n} \lambda_k e_k : \lambda_k \in \mathbb{C}, k = -n, \ldots, n \right\};$$

quindi E_n *è il "sottospazio di dimensione finita" (pari a* $2n+1$ *) generato da* $e_{-n}, \ldots, e_0, \ldots, e_n$.

É chiaro che se $f \in L^2_T$ *il suo polinomio di Fourier di ordine n appartiene a* E_n*, Vedremo ora che per ogni n intero il polinomio di Fourier* f_n *è il "punto in* E_n *di minima distanza" (*L^2*) da* f.

Teorema

Sia f una funzione di L^2_T e sia $n \in \mathbb{N}$. Allora il polinomio di Fourier f_n ha le seguenti proprietà:

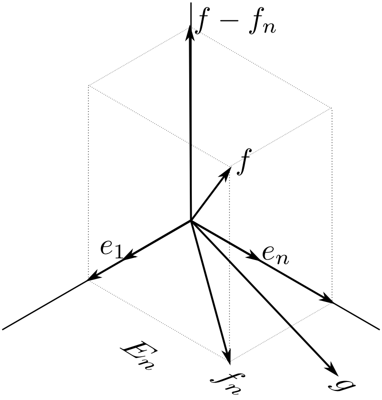
- $f_n \in E_n$;
- *per ogni g in E_n si ha* $\langle f - f_n, g \rangle = 0$;
- *per ogni g in E_n si ha:*

$$\|f - g\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n - g\|_2^2 \tag{3}$$

  e quindi f_n è l'elemento in E_n che ha minima distanza (L^2) da f;
- *si ha inoltre*

$$\|f\|_2^2 = \|f_n\|_2^2 + \|f - f_n\|_2^2$$

VEDI FIGURA



DIM

Teorema

Se $f \in L^2_T(\mathbb{R})$, cioè se f è T-periodica e ha energia finita, allora

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0. \tag{4}$$

Inoltre vale l' eguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \tag{5}$$

Viceversa se (c_k) una successione di numeri complessi tale che

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty$$

e se $f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\omega_0 kt}$, allora esiste f in $L^2_T(\mathbb{R})$ tale che valgano (4) e (5)

Osservazione

La relazione (4) *dice che le f_n "tendono a f in energia", nel senso che l'energia della differenza tende a zero. Si può esprimere questo fatto scrivendo:*

$$f \stackrel{L^2}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$$

Dato che la convergenza di natura integrale essa, in generale, non ripetta la continuità e tantomeno la diffenziabilità. Come già detto possibile trovare funzioni f continue (quindi L^2) la cui serie di Fourier non converge alcun punto (mentre DEVE convergere in energia a f).

Rimane peraltro vero che i coefficienti i Fourier "individuano univocamente" la funzione – almeno in senso integrale (nota il "per quasi ogni").

Teorema (completezza dei polinomi trigonometrici)

Se f e g sono due funzioni di L^2_T che hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora $f(t) = g(t)$ "per quasi ogni t".