Analisi di Fourier e alcune equazioni della fisica matematica [1]

TERZA LEZIONE
Serie di funzioni
Serie di potenze

[1]prof. Claudio Saccon, Dipartimento di Matematica Applicata,
Via F. Buonarroti 1/C
email: saccon@mail.dm.unipi.it
web: http://www2.ing.unipi.it/ d6081/index.html
Ricevimento: ogni lunedì, dalle 8.30 alle 11.30

Serie di funzioni

Analogamente alle serie numeriche possiamo considerare delle serie di funzioni.

Definizione

Data una successione di funzioni $\{f_n\}$ *intenderemo con serie delle* f_n *la successione* $\{S_n\}$ *delle somme parziali:*

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

(che è un'altra successione di funzioni).
Diremo che la serie converge puntualmente su A *se la successione* $\{S_n\}$ *converge puntualmente (a qualcosa) su* A.
Diremo che la serie converge uniformemente su A *se la successione* $\{S_n\}$ *converge uniformemente (a qualcosa) su* A.

È chiaro che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

Osservazione

In entrambi i casi risulta definita la somma della serie, cioè il limite $S(x)$ (puntuale o uniforme) di $\{S_n\}$, che viene indicato con

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

A volte, per esprimere il fatto che la convergenza delle somme parziali alla somma della serie è uniforme scriveremo

$$S(x) \overset{unif.}{=} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Convergenza totale

Teorema (criterio della convergenza totale)

Se $\{f_n\}$ *è una successione di funzioni su* A *e se*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} < +\infty \tag{1}$$

allora la serie delle f_n *è uniformemente convergente su* A.

Definizione

Se vale la proprietà (1) *diremo che la serie delle* f_n *è* *totalmente convergente*,
Con questa terminologia il teorema precedente diventa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ totalmente convergente} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n \text{ uniformemente convergente}$$

La verifica della convergenza totale si riduce allo studio di una **serie numerica** a **termini positivi** $\Rightarrow$ CRITERI DI CONVERGENZA.

Osservazione

Abbiamo detto che se la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,A} < +\infty$$

allora la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente su A. Indichiamo con $S(x)$ la somma della serie. Allora è facile verificare che, per ogni x in A

$$\left| S(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty,A}.$$

che ci permette di stimare "uniformemente" l'errore che si commette prendendo una somma finita in luogo della serie.

Teorema

Sia $\{f_n\}$ *una successione di funzioni su A. Supponiamo che la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converga uniformemente su A. Allora:*

- *la serie converge puntualmente su A;*
- *se tutti i termini* f_n *sono continui, allora la somma* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *è continua in A;*
- *se* $A = [a, b]$*, e se tutti i termini* f_n *sono integrabili su* $[a, b]$*, allora la somma* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *è integrabile su* $[a, b]$ *e*

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

- *se* $A = [a, b]$*, se tutti i termini* f_n *sono derivabili* ***e se*** *anche la serie delle derivate è uniformente convergente, allora la somma* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *è derivabile e*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$$

Osservazione

- *Il teorema precedente è una conseguenza degli analoghi teoremi sulle successioni di funzioni (applicati alla successione delle somme parziali).*
- *Il teorema è valido (a maggior ragione) se si sostituisce "totalmente convergente" a "uniformemente convergente" (caso tipico).*
- *Il teorema stabilisce le condizioni per degli "scambi" tra limite/integrale/derivata e simbolo di serie:*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x)$$

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

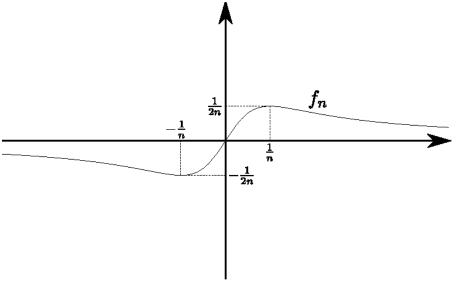
$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

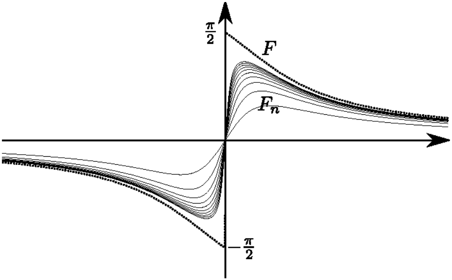
che sarebbero falsi con la sola convergenza puntuale.

Studiamo per esempio la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ dove:

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

SVOLGIMENTO





Serie di potenze

Definizione

Chiamiamo ***serie di potenze****, o serie di Taylor, una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ dove sono assegnate (a_k) una succesione di numeri reali e un numero reale $x_0 \in \mathbb{R}$, mentre x varierà in (opportuni sottoinsiemi di) $\mathbb{R}$. Per semplicità consideriamo sempre $x_0 = 0$, dato che il caso con $x_0 \neq 0$ è perfettamente analogo.*

Si tratta di un caso particolare delle serie di funzioni, caso che peraltro è assai importante. Ci interessa quindi studiare per quali x si possa scrivere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

cioè per quali x la serie converge puntualmente, definendo così una funzione $f(x)$. Vedremo poi in quali intervalli ci sarà la convergenza uniforme, da cui si potranno dedurre delle buone proprietà per la f così costruita.

Teorema (Raggio di convergenza)

Supponiamo che esista

$$l := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(in generale $l \in [0, +\infty]$*). Poniamo*

$$\bar{R} := \begin{cases} +\infty & se\ l = 0, \\ \dfrac{1}{l} & se\ l \in]0, \infty[, \\ 0 & se\ l = +\infty. \end{cases}$$

Tale $\bar{R}$ *viene detto* ***raggio di convergenza****. Allora:*

- *per ogni* x *con* $|x| < \bar{R}$ *la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge assolutamente (e dunque la serie converge puntualmente su* $]-R, R[$*);*
- *per ogni* $R < \bar{R}$ *la serie converge totalmente su* $[-R, R]$*;*
- *per ogni* x *con* $|x| > \bar{R}$ *la serie non converge.*

Si noti che non si dice nulla (e la situazione è diversa caso per caso) di cosa succeda nei punti $x = \pm\bar{R}$.

Definizione (Intervallo di convergenza)

Data la successione (a_n) *in* $\mathbb{R}$ *chiamiamo* ***intervallo di convergenza*** *della serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *l'intervallo* $]-\bar{R}, \bar{R}[$*, i cui è definita la somma di tale serie.*
Si tratta di un intervallo aperto; se $\bar{R} = 0$ *tale intervallo vuoto, se* $\bar{R} = +\infty$ *l'intervallo di convergenza coincide con* $\mathbb{R}$*.*

Osservazione

Il raggio di convergenza stato definito solo se esiste il il numero $\bar{R}$ *(in* $[0, +\infty]$*) ottenuto nel teorema precedente.*
Risulta quindi definita la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *per ogni x in* $]-\bar{R}, \bar{R}[$*.*
limite di $\sqrt[n]{|a_n|}$ *– in realtà si potrebbe vedere che c'è sempre un numero* $\bar{R}$ *con le proprietà dette sopra (usando il "massimo limite" invece del limite) e quindi il raggio di convergenza si può definire sempre.*

Teorema (Regolarità delle serie di potenze)

Sia $\{a_n\}$ *una successione e supponiamo che il raggio di convergenza* $\bar{R}$ *della serie di potenze associata agli* a_n *sia positivo:* $\bar{R} > 0$.
Indichiamo

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}.$$

Allora la funzione f *è continua ed è infinitamente derivabile in* $]-\bar{R},\bar{R}[$*;* *inoltre si può derivare sotto il segno di serie:*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} \qquad -\bar{R} < x < \bar{R}.$$

La formula scritta sopra ha senso in quanto la serie delle derivate è anch'essa una serie di potenze e ***ha lo stesso raggio di convergenza*** *della serie di partenza.*

DIM

Osservazione

Supponiamo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *abbia raggio di convergenza* $\bar{R} > 0$. *Allora, come abbiamo visto, la somma* $f(x)$, *che è definita in* $]-\bar{R}, \bar{R}[$, *è infinitamente derivabile e*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k} \qquad \forall x \in]-\bar{R}, \bar{R}[.$$

Mettendo $x = 0$ *tutti i termini della serie delle derivate si annullano –* ***tranne il primo****; dunque*

$$f^{(k)}(0) = k! a_k \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}}.$$

Quindi gli a_k *sono i* ***coefficienti di Taylor*** *della funzione* f *(risultante dalla somma della serie).*

Problema inverso

Data una funzione infinitamente derivabile f definita vicino a zero, e posto

$$a_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

ci possiamo chiedere se:

- la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converga da qualche parte (cioè se abbia raggio di convergenza positivo);
- tale serie converga proprio alla funzione $f(x)$ (da cui eravamo partiti).

Questo problema **è diverso** da quello iniziale, in cui si parte dagli a_n.

La risposta è NO - **non è sempre vero**. In certi casi la risposta è SÌ, per ogni x in cui è definita $f(x)$. In altri casi ci sono delle x "buone" in cui la serie converge a $f(x)$ e altre in cui ciò non succede. Si può anche costruire un esempio in cui la serie non converge a $f(x)$ per nessuna $x \neq 0$.

Valgono i seguenti risultati:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x) \qquad \text{per ogni } x \text{ reale;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha \qquad \text{se } -1 < x < 1;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \qquad \text{se } -1 < x < 1;$$

ALCUNE VERIFICHE

Nei primi tre casi “tutte le x sono buone”, mentre negli altri l’intervallo di convergenza è strettamente più piccolo di quello in cui è definita la funzione.

Esempio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Si vede subito che il raggio è uno. Inoltre:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \qquad -1 < x < 1$$

(serie geometrica !!!). La cosa può sembrare strana, visto che $f(x)$ *non ha nessuna singolarità né in* 1 *né in* -1.

In realtà la prospettiva giusta da cui affrontare le serie di potenze sarebbe nei ***numeri complessi***. *Si potrebbe dimostrare che la regione di convergenza è un disco di raggio* $\bar{R}$ *(quello di prima). In questo caso* $\bar{R} = 1$ *e la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad |z| < 1$$

ha due singolarità in $z = \pm i$.

Esempio

Se consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definita da:*

$$f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$$

si vede (con qualche calcolo) che per qualunque n $f(x) = o(x^n)$ *per* $x \to 0$, *che è come dire che:*

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Questo significa che la serie di Taylor costruita a partire da f *ha tutti i coefficienti nulli e quindi la sua somma è zero.*
D'altra parte $f(x) \neq 0$ *se* $x \neq 0$ *e quindi*

$$f(x) \neq \text{ somma della sua serie di Taylor} \qquad \forall x \neq 0.$$

Anche in questo caso il fenomeno si capirebbe meglio passando per i numeri complessi, dato che $\lim_{y \to 0} f(iy) = \lim_{y \to 0} e^{\frac{1}{y^2}} = +\infty.$

Qualche esempio

Con i metodi introdotti fino a qui possiamo studiare la convergenza e anche trovare la somma delle seguenti serie di potenze.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^n}{2^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n x^n}{n}$$

ALCUNI SVOLGIMENTI

Teorema (Principio di identità)

Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *abbia raggio di convergenza positivo. Allora la somma della serie è identicamente nulla sull'intervallo di convergenza se e solo se tutti i coefficienti* a_n *sono nulli.*
Se ne deduce che due serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *hanno la stessa somma se e solo se* $a_n = b_n$ *per ogni* n.