

DOMANDE/ESERCIZI¹

Proposizione	Vera	Falsa
$A \subset [0, 2]$ implica $\exists \sup A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A \subset [0, 2]$ implica $\exists \max A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A \subset [0, 2[$ implica $\exists \sup A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$A \subset [0, 2[$ implica $\sim(\exists \max A)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sup A = 3$ implica $3 \in A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\sup A = 3$ implica $3 \notin A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$(\sup A = 3) \wedge (3 \in A)$ implica $3 = \max A$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Proposizione	Vera	Falsa
$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ implica $\sup_{[0,1]} f \leq 1$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : [0, 1] \rightarrow]-1, 1[$ implica f limitata	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : [0, 1] \rightarrow]0, 2[$ implica $\sup_{[0,1]} f \leq 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : [0, 1] \rightarrow]0, 2[$ implica $\sup_{[0,1]} f = 2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f : [0, 1] \rightarrow]0, 2[$ implica che non esiste $\max_{[0,1]} f$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$\sup\{y : (\exists x \in \mathbb{R} : y = \cos(x))\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : x = \cos(y))\} =$	
$\sup\{x : \cos(x) = 1\} =$	
$\sup\{x : (\exists y \in \mathbb{R} : \cos(x) = y + 1)\} =$	
$\inf\{y : (\exists x \in [0, 2[: y = -x^2 + 4)\} =$	
$\inf\{x : 4x - 2 \geq 10\} =$	
$\inf\{y : \forall x \in]-1, 1[\quad 1 - x^2 < y\} =$	

¹cfr. <http://www2.ing.unipi.it/d8702/matematica/test00.html> (prof. M. Franciosi)

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

funzione	iniettiva ?	surgettiva ?
$f(x) = 2x - 5$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^2 + 4x + 4$		
$f(x) = \cos(x)$		
$f(x) = x^3 - x^2$		
$f(x) = x^3 - x$		
$f(x) = 2^x$		
$f(x) = 3^{-x}$		
$f(x) = 2^{1+x^2}$		
$f(x) = \ln(1 + x^2)$		
$f(x) = \sqrt{3} \cos(x) + \sin(x)$		
$f(x) = x - 3 $		
$f(x) = x^{2000} + 2000$		

$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$2x - 4$	$[0, 3]$		$[0, 2]$	
x^2	$[0, 3]$		$[0, 4]$	
x^3	$[0, 3]$		$[0, 27]$	
$x^2 + 4x + 4$	$[-2, 1]$		$[0, 4]$	
$\cos(x)$	$[0, \pi]$		$[-2, 2]$	
$f(x)$	A	$f(A)$	B	$f^{-1}(B)$
$\sin(x)$	$[0, \pi]$		$[1, 2]$	
2^x	$] -\infty, 0[$		$[1, +\infty[$	
$\ln(x)$	$]0, 1]$		$[1, e^2]$	
$ x - 3 $	$[2, 4]$		$[0, 2]$	
3^x	\mathbb{R}		$[1, 3]$	

- Dimostrare che

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- Dimostrare che

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = \sum_{i=0}^n (2i+1) = (n+1)^2$$

- (*) Trovare un polinomio $p(x)$ di grado quattro tale che

$$\sum_{i=1}^n i^3 = p(n)$$

Suggerimento: si cerchi $p(x)$ in modo che

$$p(0) = 0 \text{ e } p(x+1) = p(x) + (x+1)^3$$

e poi si applichi l'induzione.

Svolgimento. Come da suggerimento cerchiamo

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

in modo che $p(0) = 0$ e $p(x+1) = p(x) + (x+1)^3$. La prima condizione equivale a $e = 0$. Cerchiamo di verificare la seconda:

$$a[(x+1)^4 - x^4] + b[(x+1)^3 - x^3] + c[(x+1)^2 - x^2] + d[(x+1) - x] = (x+1)^3$$

Ricordando la formula

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i} B^i$$

prendendo $A = x+1$ e $B = x$, si passa alla condizione:

$$\begin{aligned} &a[(x+1)^3 + x(x+1)^2 + x^2(x+1) + x^3] + \\ &b[(x+1)^2 + x(x+1) + x^2] + \\ &c[(x+1) + x] + \\ &d[1] = (x+1)^3 \end{aligned}$$

Cerchiamo di ottenere delle condizioni su a, b, c, d dalle condizioni sopra (senza sviluppare tutto – cosa che comunque si potrebbe fare). Se cerchiamo i coefficienti di x^3 notiamo che questi possono uscire solo dalla prima riga e dal termine $(x+1)^3$. Si vede allora che

$$4ax^3 + \text{polinomio di grado più basso} = (x^3 + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

da cui $a = \frac{1}{4}$. Inoltre se calcoliamo le condizioni sopra per $x = 0$, troviamo

$$a + b + c + d = 1$$

mentre se mettiamo $x = -1$ viene

$$-a + b - c + d = 0$$

Purtroppo manca ancora una condizione. Mettendo $x = 1$ si trova

$$a[2^3 + 2^2 + 2 + 1] + b[2^2 + 2 + 1] + c[2 + 1] + d[1] = 2^3$$

e in definitiva il sistema

$$\begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ a + b + c + d = & 1 \\ -a + b - c + d = & 0 \\ 15a + 7b + 3c + d = & 8 \end{cases}$$

Sostituendo la seconda e la terza riga con le loro rispettive somme e differenze:

$$\begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ 2b + 2d = & 1 \\ 2a + 2c = & 1 \\ 15a + 7b + 3c + d = & 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ 2b + 2d = & 1 \\ \frac{15}{4} + 7b + \frac{3}{4} + d = & 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ 2b + 2d = & 1 \\ 7b + d = & \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = & \frac{1}{4} \\ c = & \frac{1}{4} \\ b = & \frac{1}{2} \\ d = & 0 \end{cases}$$

e quindi

$$p(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4} = \frac{x^2(x^2 + 2x + 1)}{4} = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

In effetti (verifica)

$$\begin{aligned} p(x) + (x+1)^3 &= \frac{x^2(x+1)^2}{4} + (x+1)^3 = \frac{(x+1)^2}{4} [x^2 + 4(x+1)] = \\ &= \frac{(x+1)^2}{4} [x^2 + 4x + 4] = \frac{(x+1)^2(x+2)^2}{4} = p(x+1) \end{aligned}$$

A questo punto è facile dimostrare per induzione che:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 = p(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

□