Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 8 febbraio 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+3^n+1} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 n!}{n^n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(1/n)-1) \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Data $f(x) := e^x + 2\text{tg}(x)$, calcolare (se esiste) (3p.):

$$(f^{-1})'(1) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} / \boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio, se esiste (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} / \boxed{\text{non esiste}}$$

4. Sia $f(x,y) := 16x^4 + y^4 - 2xy$. Dando per noto che $|f(x,y)| \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$ si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

5. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x) := e^x\sqrt{1+x}$ nel punto 0 (3p.):

$$P_2(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

DA SVOLGERE SUL FOGLIO

1. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)e^{-x} - 1 + x}{\sin(x) - x}$.

2. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x}y + \frac{3}{2}x - x^2, \qquad x > 0.$$

   (a) Dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

   (c) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,2[$ (3p.).

Soluzioni

1. - La prima serie è a segni alterni, cioè del tipo $\sum(-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{1}{n+2}$. Dato che a_n è decrescente e infinitesima la serie converge per Leibniz. D'altra parte $\sum a_n$ non converge perché è una serie armonica di esponente 1. In definitiva la prima serie $\boxed{\text{converge, ma non assolutamente}}$.
   - Posto $a_n := \frac{n^2}{n^3+3^n+1}$ si ha che $a_n > 0$ (serie a termini positivi) e che
   $$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3\sqrt[n]{n^3/3^n + 1 + 1/3^n}} \to \frac{1}{3} < 1$$
   Applicando il criterio della radice si ottiene che la serie $\boxed{\text{converge assolutamente}}$.
   - Poniamo $a_n := \dfrac{n^3 n!}{n^n}$. Anche in questo caso $a_n > 0$. Applichiamo il criterio del rapporto:
   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\frac{n^n}{n^3 n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$
   Ne segue, per il criterio del rapporto, che la serie $\boxed{\text{converge assolutamente}}$.
   - Posto $a_n := \cos(1/n) - 1$ si vede facilmente che $a_n < 0$ e che $n^2 a_n = \frac{\cos(1/n)-1}{1/n^2} \to -1/2$. Questo implica che a_n è asintotica alla sucessione $b_n := -\frac{1}{2n^2}$ e siccome $\sum b_n < +\infty$ anche la serie di partenza converge e $\boxed{\text{converge assolutamente}}$ visto che, essendo di segno costante, convergenza e convergenza assoluta sono la stessa cosa.

2. Si ha $f(0) = 1$ e dunque $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = e^x + 2\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ e quindi $f'(0) = 3$. Ne segue che
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

3. Si vede subito che l'integrando è positivo (e dunque l'integrale può solo convegere o divergere a $+\infty$. D'altra parte la funzione integranda è asintotica a $\frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$, dato che
$$x\frac{x}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1/x^4+1}} \to 1$$
e quindi l'integrale fa $\boxed{+\infty}$ (è anche accettabile la risposta $\boxed{\text{non esiste}}$) dato che $\frac{1}{x}$ ha integrale divergente all'infinito.

4. Dato che f tende a $+\infty$ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$ il minimo deve esistere. Per trovarlo cerchiamo i punti stazionari di $f(x,y) := 16x^4 + y^4 - 2xy$. Si ha:
$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 64x^3 - 2y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 4y^3 - 2x$$
da cui si deduce che $\nabla f(x,y) = 0$ se e solo se
$$\begin{cases} y = 32x^3 \\ x = 2y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^5x^3 \\ x = 2^{16}x^9 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ oppure } \begin{cases} y = 2^5x^3 \\ 1 = 2^{16}x^8 \end{cases}$$

La seconda condizione equivale a

$$\begin{cases} y = 2^5 x^3 \\ 2^2 x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm \dfrac{1}{2} \\ x = \pm \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \pm \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

Quindi i punti critici sono $(0,0)$ e $\pm(1/4, 1/2)$. Però $f(0,0) = 0$ mentre $f(1/4, 1/2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$ e dunque il minimo si realizza nei due punti $\boxed{\pm\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)}$ (basta indicarne uno).

5. Si ha

$$e^x \sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) =$$
$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) + o(x^2) =$$
$$1 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}x^2 + o(x^2)$$

e quindi $P_2(x) = \boxed{1 + \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{8}x^2}$.

SECONDA PARTE

1. Si ha:

$$\cos(x)e^{-x} - 1 + x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - 1 + x =$$
$$\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + o(x^3)\right) - 1 + x =$$
$$1 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - 1 + x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Inoltre

$$\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)e^{-x} - 1 + x}{\sin(x) - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \boxed{-2}$$

2. (a) Dalla formula risolutiva si ha:

$$y(x) = \sqrt{x}\left(y(1) + \int_1^x \frac{3t - 2t^2}{2\sqrt{t}}\, dt\right) = \sqrt{x}\left(C + \sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right) = C\sqrt{x} + x^2 - \frac{2}{5}x^3$$

dove $C = y(1) - 1 + \frac{2}{5} = y_0 - \frac{3}{5}$.

(b) Dal calcolo precedente si deduce che, indipendentemente da C, cioè da y_0,

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$

Si può anche notare (servirà dopo) che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(C + \sqrt{x^3} - \frac{2}{5}\sqrt{x^5}\right) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } C \geq 0 \\ 0^- & \text{se } C < 0 \end{cases}$$

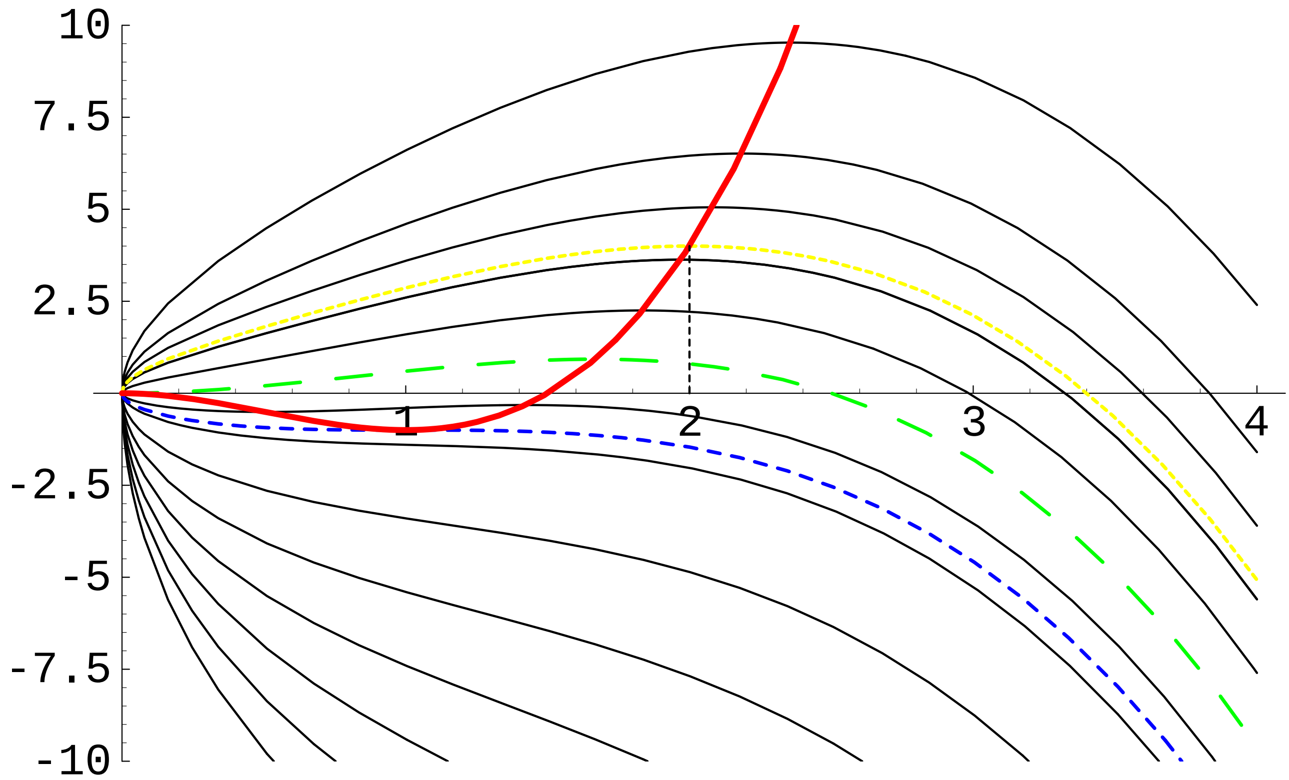
(nel caso $C = 0$ si metta in evidenza x^2).
Notiamo che il valore $C = 0$ corrisponde a $y_0 = \frac{3}{5}$

(c) Conviene ora farsi un'idea del grafico delle y. Per questo poniamo $F(x, y) := \frac{y}{2x} + \frac{3}{2}x - x^2$ di modo che l'equazione si può esprimere come $y' = F(x, y)$. Individuiamo nel piano cartesiano le coppie (x, y) tali che $x > 0$ e $F(x, y) > 0$. Queste condizioni equivalgono a $x > 0$ e $y > 2x(x^2 - \frac{3}{2}x) = 2x^2(x - \frac{3}{2}x)$. Se chiamiamo $g(x) := 2x^2(x - \frac{3}{2})$, allora, nelle $x > 0$,

$$F(x, y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x), \qquad F(x, y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x), \qquad F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Con un semplice studio di funzione si vede che che il grafico di g passa per $(0, 0)$ (con tangente orizzontale) decresce fino a 1 dove raggiunge il minimo di ordinata -1 e poi cresce sempre tendendo a $+\infty$ (ripassando per zero in $x = \frac{3}{2}$). Le informazioni raccolte ci dicono che ogni soluzione y deve essere crescente quando sta sopra tale curva (cioè nelle x in cui $y(x) > g(x)$), deve essere decrescente quando sta sotto (cioè nelle x in cui $y(x) < g(x)$) e deve avere derivata nulla quando attraversa la curva ($y(x) = g(x)$). Mettendo insieme questi fatti e i limiti trovati si perviene ai grafici indicati in figura (la curva rossa con tratto spesso è la curva di equazione $y = g(x)$). In particolare la soluzione $\bar{y}$ che passa per $(1, -1)$ è tangente alla curva nel punto di minio ed è sempre decrescente (curva blu con tratteggio fitto). Tale $\bar{y}$ è quella con $y_0 = -1$. Per $y_0 < -1$ le soluzioni sono sempre sotto il grafico di g e dunque sono sempre decrescenti.
Per $\frac{3}{5} > y_0 > -1$ le curve sono sopra $\bar{y}$ e necessariamente decrescono in un intervallino a destra di zero (dovendo essere $y(t) \to 0^-$ per $t \to 0^+$) incrociano il grafico di g, crescono per un altro intervallo fino a che non intersecano di nuovo il grafico di g (lo devono fare poichè $y(t) \to -\infty$ se $t \to +\infty$) e da questo punto decrescono sempre e vanno a meno infinito.
Se $y_0 \geq \frac{3}{5}$ le curve sono crescenti vicino a zero fino a quando non attraversano la g e poi vanno decrescendo a meno infinito (la curva con $y_0 = \frac{3}{5}$ è indicata dal colore verde, tratteggio rado).
In definitiva la risposta alla domanda è $\boxed{y_0 \leq -1}$ (sotto la curva blu).

(d) Per i motivi esposti nel punto precedente le y crescenti in un tratto a destra di zero devono avere $y_0 \geq \frac{3}{5}$ (sopra la curva verde). Peró tutte queste y ad un certo punto incrociano il grafico di g e diventano decrescenti - il problema é allora di capire per quali valore di y_0 il "punto di svolta" si trova a destra di 2. Per questo calcoliamo $g(2) = 8(2 - \frac{3}{2}) = 4$. Indichiamo con $\tilde{y}$ la soluzione tale che $\tilde{y}(2) = 4$ (che viene indicata nella figura con colore giallo - tratteggio fittissimo). Il C relativo a $\tilde{y}$ verifica $4 = C\sqrt{2} + 4 - \frac{16}{5} \Leftrightarrow C = \frac{8}{5}\sqrt{2}$ che corrisponde a $y_0 = \frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{3}{5} = \frac{8\sqrt{2}+3}{5}$. Le y crescenti su $[0, 2]$ sono quelle sopra (o eguali) a $\tilde{y}$ e cioè quelle con $\boxed{y_0 \geq \frac{8\sqrt{2}+3}{5}}$.



10
7.5
5
2.5
-2.5
-5
-7.5
-10
1
2
3
4