Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 6 giugno 2005
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino i seguenti limiti (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+4}\right)^n = e^{-3},\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(2n)!} = +\infty\ \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-4n\sin(n)}{n^2+1} = 1$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per la funzione $f(x) = e^{\sin(x)+4}$, in $x_0 = 0$ (4p.): $P_3(x) = e^4\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$

3. Data la funzione $f(x) = e^x + 5x$ si ha (2p.) $f^{-1}(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4+2n^2+5n+1}\right)$.
Vedi risoluzione in fondo (il limite fa $-\frac{5}{4}$).

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}\quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^3)}{n^3+7}\quad \boxed{\xcancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-n}{n+7}\quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+4}\quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\xcancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+125}\,dx = \frac{1}{5^2}\frac{2}{9}\pi/\boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := x + 5xy$. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f relativamente al punto $(1,1)$ (2p.)

$$z = 6x + 5y - 5$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{2x}y + \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui la soluzione y è crescente (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui l'equazione $y(x) + 2/3 = 0$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

Vedi risoluzione in fondo.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 6 giugno 2005
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino i seguenti limiti (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+5}\right)^n = e^{-4}, \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(2n)!} = +\infty \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-5n\sin(n)}{n^2+1} = 1$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per la funzione $f(x) = e^{\sin(x)+5}$, in $x_0 = 0$ (4p.): $P_3(x) = e^5\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)$

3. Data la funzione $f(x) = e^x + 3x$ si ha (2p.) $f^{-1}(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[4]{n^4+2n^2+2n+1}\right)$.
Vedi risoluzione in fondo (il limite fa $-\frac{2}{4}$).

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$	AC C **X** NC	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^3)}{n^3+9}$	**X** AC C NC
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-n}{n+9}$	AC C **X** NC	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$	AC **X** C NC

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+27}\,dx = \frac{1}{3^2}\frac{2}{9}\pi/\boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := x + 3xy$. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f relativamente al punto $(1,1)$ (2p.)

$$z = 4x + 3y - 3$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{2x}y + \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui la soluzione y è crescente (3p.);
(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui l'equazione $y(x) + 2/3 = 0$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

Vedi risoluzione in fondo.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 6 giugno 2005
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino i seguenti limiti (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+6}\right)^n = e^{-5}, \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(2n)!} = +\infty \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-6n\sin(n)}{n^2+1} = 1$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per la funzione $f(x) = e^{\sin(x)+6}$, in $x_0 = 0$ (4p.): $P_3(x) = e^6\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$

3. Data la funzione $f(x) = e^x + 4x$ si ha (2p.) $f^{-1}(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[4]{n^4+2n^2+3n+1}\right)$.
Vedi risoluzione in fondo (il limite fa $-\frac{3}{4}$).

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+6}$	$\boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^3)}{n^3+5}$	$\boxed{\xcancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-n}{n+5}$	$\boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$	$\boxed{\text{AC}}\ \boxed{\xcancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+64}\,dx = \frac{1}{4^2}\frac{2}{9}\pi/\boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := x + 4xy$. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f relativamente al punto $(1,1)$ (2p.)

$$z = 5x + 4y - 4$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{2x}y + \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui la soluzione y è crescente (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui l'equazione $y(x) + 2/3 = 0$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

Vedi risoluzione in fondo.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 6 giugno 2005
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino i seguenti limiti (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+7}\right)^n = e^{-6}, \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(2n)!} = +\infty \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-7n\sin(n)}{n^2+1} = 1$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per la funzione $f(x) = e^{\sin(x)+7}$, in $x_0 = 0$ (4p.): $P_3(x) = e^7\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$

3. Data la funzione $f(x) = e^x + 2x$ si ha (2p.) $f^{-1}(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[4]{n^4+2n^2+4n+1}\right)$.
   Vedi risoluzione in fondo (il limite fa $-\frac{4}{4}$).

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+7}$	$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\cancel{\boxed{\text{NC}}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n^3)}{n^3+3}$	$\cancel{\boxed{\text{AC}}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-n}{n+3}$	$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\cancel{\boxed{\text{NC}}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+7}$	$\boxed{\text{AC}}$ $\cancel{\boxed{\text{C}}}$ $\boxed{\text{NC}}$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{2^2}\frac{2}{9}\pi / \boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := x + 2xy$. Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico di f relativamente al punto $(1,1)$ (2p.)

$$z = 3x + 2y - 2$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{2x}y + \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui la soluzione y è crescente (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui l'equazione $y(x) + 2/3 = 0$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

   Vedi risoluzione in fondo.

PRIMA PARTE

1. 1) Si ha:

$$\left(\frac{n+1}{n+A}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1-A}{n+A}\right)} = e^{n\left(\frac{1-A}{n+A}+o\left(\frac{1-A}{n+A}\right)\right)} = e^{\left(\frac{n(1-A)}{n+A}+o\left(\frac{n(1-A)}{n+A}\right)\right)} \to e^{1-A}$$

2) Posto $a_n := (2n)!$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = n+1 \to +\infty \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to +\infty$$

3) Dato che

$$\left|\frac{An\sin(n)}{n^2+1}\right| \le \frac{An}{n^2+1} \to 0$$

si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - An\sin(n)}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

2. Si ha (gli o piccoli sono riferiti al punto $x_0 = 0$):

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \qquad e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 + o(y^3) \qquad \Rightarrow$$
$$e^{\sin(x)+A} = e^A e^{\sin(x)} = e^A e^{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)} =$$
$$e^A\left(1 + x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + \frac{1}{6}(x+o(x^2))^3\right) =$$
$$e^A\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) \Rightarrow P_3(x) = e^A\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

3. Se $f(x) = e^x + Ax$ è chiaro che $f(0) = 1$ e dunque $f^{-1}(1) = 0$

4. Si ha:

$$n^2\left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[4]{n^4+2n^2+An+1}\right) = \frac{n^2\left(n^2+1-\sqrt{n^4+2n^2+An+1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4+2n^2+An+1}} =$$
$$\frac{n^2\left((n^2+1)^2-(n^4+2n^2+An+1)\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4+2n^2+An+1}\right)\left(n^2+1+\sqrt{n^4+2n^2+An+1}\right)} =$$
$$\frac{-An^3}{\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt[4]{n^4+2n^2+An+1}\right)\left(n^2+1+\sqrt{n^4+2n^2+An+1}\right)} =$$
$$\frac{-A}{\left(\sqrt{1+1/n^2}+\sqrt[4]{1+2/n^2+A/n^3+1/n^4}\right)\left(1+1/n^2+\sqrt{1+2/n^2+A/n^3+1/n^4}\right)} \to -\frac{A}{4}$$

SECONDA PARTE

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+A}$. La serie è a termini positivi. Si ha

$$\frac{n^2}{n^3+A} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+A/n^3} = \frac{1}{n}\left(1+o(1)\right)$$

e dunque il termine generale è asintotico a $1/n$, da cui la serie diverge.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^3)}{n^3+A}$. La serie non è a termini positivi. Passiamo alla serie dei moduli:

$$\left|\frac{\sin(n^3)}{n^3+A}\right| \leq \frac{1}{n^3+A} \leq \frac{1}{n^3}$$

e quindi la serie converge assolutamente, dato che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n}-n}{n+A}$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{1+n}-n}{n+A} = -1$$

e dunque la serie non converge (si può vedere che diverge a $-\infty$).
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+A}$. La serie è a segni alterni e si vede facilmente che $n \mapsto 1/(n+A)$ è decrescente. Quindi la serie converge per il criterio di Leibniz. Peraltro la serie non converge assolutamente dato che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+A}$ è divergente poiché ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2. Si deve calcolare (oppure dire che non esiste) il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+A^3}\,dx$$

Possiamo, per eliminare A, usare la sostituzione $x = Ay$ da cui $dx = Ady$ e quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3+A^3}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{A^3y^3+A^3} A\,dy = \frac{1}{A^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^3+1}\,dy$$

(questo passaggio non è ovviamente essenziale ma avere $A = 1$ rende comunque i calcoli più semplici). Riduciamo l'integrando in fratti semplici; ricordando che vla la fattorizzazione $y^3+1 = (y+1)(y^2-y+1)$ si può scrivere:

$$\frac{1}{y^3+1} = \frac{a}{y+1} + \frac{by+c}{y^2-y+1} = \frac{(a+b)y^2+(-a+b+c)y+(a+c)}{(y+1)(y^2-y+1)}$$

Risolviamo il sistema lineare in a, b, c:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} b & & = -a & & \\ -2a & + & c & = & 0 \\ a & + & c & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -a \\ c & = & 2a \\ 3a & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b & = & -\frac{1}{3} \\ c & = & \frac{2}{3} \\ a & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Tornando all'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^3+1}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y+1} + \frac{-y+2}{y^2-y+1}\right) dy =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{y^2-y+1}\right) dy =$$

$$\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty} \left[\ln(y+1) - \frac{1}{2}\ln\left(y^2-y+1\right)\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(y-1/2)^2+3/4}\,dy =$$

$$\frac{1}{3}\lim_{t\to+\infty} \left[\ln\left(\frac{y+1}{\sqrt{y^2-y+1}}\right)\right]_0^t + \frac{2}{3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dy =$$

$$0 + \frac{2}{3}\lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^t = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{9}\pi$$

A questo punto il risultato si trova dividendo per A^2.

3. Sia $f(x,y) := x + Axy$. Con rapidi calcoli si trova:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 1 + Ay, \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = Ax$$

per cui il piano tangente in $(1,1)$ ha equazione:

$$z = f(1,1) + \frac{\partial}{\partial x} f(1,1)(x-1) + \frac{\partial}{\partial y} f(1,1)(y-1) = 1+A+(1+A)(x-1)+A(y-1) = (1+A)x+Ay-A$$

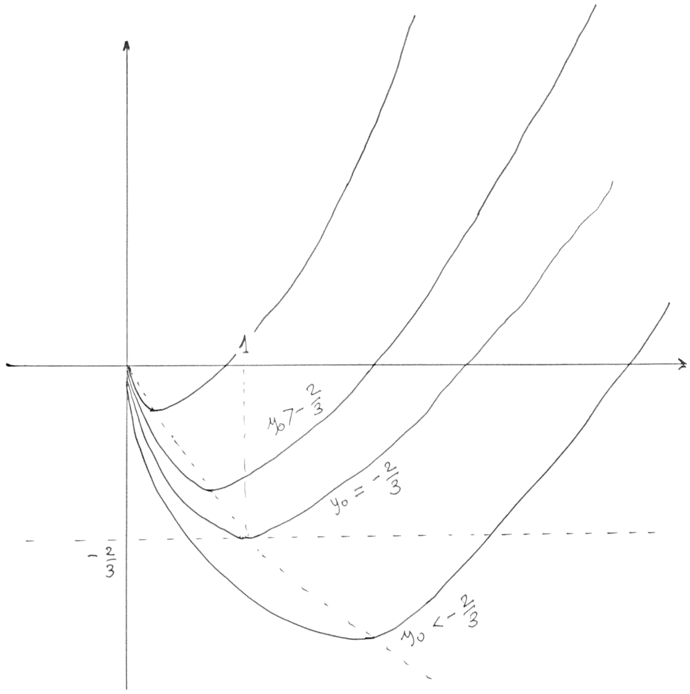
4. Applicando la formula si trova l'espressione della soluzione:

$$y(x) = x^{3/2}\left(y(1) + \int_1^x t^{-3/2} t^{1/2}\, dt\right) = x^{3/2}\left(y(1) + [\ln(t)]_1^x\right) = x^{3/2}\left(y_0 + \ln(x)\right)$$

Allora (indipendentemente da y_0)

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = 0^-, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

Per tracciare il grafico poniamo $F(x,y) = \frac{3}{2x} y + \sqrt{x}$ e studiare il segno di F. Si ha $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3} x^{3/2} =: g(x)$ e analogamente $F(x,y) \geq / \leq 0 \Leftrightarrow y \geq / \leq g(x)$. Tracciamo il grafico di g: sempre decrescente, passa per $(0,0)$ e tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$.. A questo punto le curve y devono essere crescenti quando $y(x) > g(x)$, decrescenti se $y(x) < g(x)$ e devono incrociare il grafico di g con tangente orizzontale. Se ne ricavano i grafici indicati in figura. Notiamo che a causa del limite 0^- in zero, ogni y esce da zero in modo decrescente.



Dai grafici si deduce che NON ci sono y_0 per cui y è crescente. Per rispondere all'ultimo punto tracciamo la retta $y = -2/3$ e notiamo che essa interseca il grafico di g in $(1, -2/3)$. Dunque la curva relativa a $y_0 = -2/3$ è tangente a tale retta. Si vede allora che le curve con $y_0 > -2/3$ non intersecano la retta $y = -2/3$ mentre QUELLE CON $y_0 < -3/2$ la intersecano due volte.