Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 27 giugno 2005 - A -
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+4}\right)^n = 1, \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot 4^n+7n} = 4, \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1-4n\sin(n)}{n^2+1} = 0$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x) = \sqrt{(1+e^{5x})/2}$, in $x_0 = 0$ (4p.):
   $P_2(x) = 1 + \frac{5}{4}x + \frac{75}{32}x^2$

3. Data la funzione $f(x) = 2^x + 5x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\ln(2)+5}$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4}$.
   Vedi soluzione alla fine

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+4}$	$\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^6+7}$	$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{X}}$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+7}$	$\boxed{\text{X}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+4(-1)^n}$	$\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{X}}$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{1/5}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+5x)}\,dx = 5(1-\ln(2))$$

3. Sia $f(x,y) := x^4 + y^4 + 25xy$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = (5/2, -5/2) \text{ oppure } (-5/2, 5/2)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,1[$ (3p.).

   Vedi soluzioni alla fine.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 27 giugno 2005 - B -
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^n = 1, \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot 5^n+9n} = 5, \lim_{n\to+\infty}\frac{1-5n\sin(n)}{n^2+1} = 0$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x)=\sqrt{(1+e^{2x})/2}$, in $x_0=0$ (4p.):

   $P_2(x) = 1 + \frac{2}{4}x + \frac{12}{32}x^2$

3. Data la funzione $f(x) = 2^x + 3x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\ln(2)+3}$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4}$.

   Vedi soluzione alla fine

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+5} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^6+9} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+9} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+5(-1)^n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{1/3}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+3x)}\,dx = 3(1-\ln(2))$$

3. Sia $f(x,y) := x^4 + y^4 + 16xy$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = (4/2, -4/2) \text{ oppure } (-4/2, 4/2)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,1[$ (3p.).

   Vedi soluzioni alla fine.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 27 giugno 2005 - C -
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+6}\right)^n = 1,\ \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot 6^n+5n} = 6,\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1-6n\sin(n)}{n^2+1} = 0$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x)=\sqrt{(1+e^{3x})/2}$, in $x_0=0$ (4p.):
   $P_2(x) = 1+\frac{3}{4}x+\frac{27}{32}x^2$

3. Data la funzione $f(x)=2^x+4x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1)=\frac{1}{\ln(2)+4}$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4}$.
   Vedi soluzione alla fine

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+6} \quad \boxed{\xcancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^6+5} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+5} \quad \boxed{\xcancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+6(-1)^n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\xcancel{\text{NC}}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{1/4}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+4x)}\,dx = 4(1-\ln(2))$$

3. Sia $f(x,y):=x^4+y^4+9xy$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):

$$(x_{min},y_{min}) = (3/2,-3/2) \text{ oppure } (-3/2,3/2)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x}y+x-2, \qquad x>0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1)=y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,1[$ (3p.).

   Vedi soluzioni alla fine.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 27 giugno 2005 - D -
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+7}\right)^n = 1, \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\cdot 7^n+3n} = 7, \lim_{n\to+\infty}\frac{1-7n\sin(n)}{n^2+1} = 0$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x)=\sqrt{(1+e^{4x})/2}$, in $x_0 = 0$ (4p.):
   $P_2(x) = 1 + \frac{4}{4}x + \frac{48}{32}x^2$

3. Data la funzione $f(x) = 2^x + 2x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{\ln(2)+2}$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4}$.
   Vedi soluzione alla fine

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+7}$	X AC, C, NC	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^6+3}$	AC, C, X NC
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+3}$	X AC, C, NC	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+7(-1)^n}$	AC, C, X NC

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{1/2}^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+2x)}\,dx = 2(1-\ln(2))$$

3. Sia $f(x,y) := x^4+y^4+4xy$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = (2/2, -2/2) \text{ oppure } (-2/2, 2/2)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2, \qquad x>0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,1[$ (3p.).

   Vedi soluzioni alla fine.

PRIMA PARTE

1.

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+A}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1-A}{n^2+A}\right)} = e^{n\left(\frac{1-A}{n^2+A}+o\left(\frac{1-A}{n^2+A}\right)\right)} = e^{\left((1-A)\frac{n}{n^2+A}+o\left(\frac{n}{n^2+A}\right)\right)} \to e^0 = 1$$

$$\sqrt[n]{2\cdot A^n + Bn} = A\sqrt[n]{2+\frac{Bn}{A^n}} = Ae^{\frac{1}{n}\ln\left(2+\frac{Bn}{A^n}\right)} \to Ae^0 = A$$

$$\left|\frac{1-An\sin(n)}{n^2+1}\right| \leq \frac{1+|A|n}{n^2+1} \to 0$$

2. Sia $f(x) = \sqrt{(1+e^{Ax})/2}$. Allora, rispetto a $x_0 = 0$:

$$e^{Ax} = 1 + Ax + \frac{A^2}{2}x^2 + o(x^2); \qquad \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2);$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1 + Ax + \frac{A^2}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \sqrt{1 + \frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}x^2 + o(x^2)} =$$

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{A}{2}x + \frac{A^2}{4}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{A}{2}x + o(x)\right)^2 + o(O(x)^2) =$$

$$1 + \frac{A}{4}x + \frac{A^2}{8}x^2 - \frac{A^2}{32}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{A}{4}x + \frac{3A^2}{32}x^2 + o(x^2) =$$

e dunque $P_2(x) = 1 + \frac{A}{4}x + \frac{3A^2}{32}x^2$. Notiamo che questo implica che

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = \frac{A}{4}, \qquad f''(0) = \frac{3A^2}{16}$$

e che si puó fare l'esercizio anche calcolando direttamente le derivate sopra.

3. Data la funzione $f(x) = 2^x + Ax$ si ha $f(0) = 1$, $f'(x) = \ln(2)2^x + A$, $f'(0) = \ln(2) + A$ e dunque

$$f^{-1}(1) = 0, \qquad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln(2)+A}$$

4. Si calcoli il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4}$.

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o((2x)^4) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4);$$

$$\sqrt{1+4x^2} = 1 + \frac{1}{2}(4x^2) - \frac{1}{8}(4x^2)^2 + o((4x^2)^2) = 1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4);$$

$$\cos(2x)\sqrt{1+4x^2} = \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\right) =$$

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) + 2x^2 - 4x^4 + O(x^6) - 2x^4 + O(x^6) + o(x^4) = 1 - \frac{16}{3}x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)\sqrt{1+4x^2}-1}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{16}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{16}{3}$$

SECONDA PARTE

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+A}$ La serie è a termini positivi. Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n+A}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[n]{1+A/3^n}} \to \frac{2}{3} < 1$$

dunque la serie converge assolutamente (convergenza e convergenza assoluta coincidono se i termini sono positivi).
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^6+A}$ La serie è a termini positivi. Applicando il criterio della radice:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^6+A}} = 2\frac{1}{\sqrt[n]{n^6+A}} \to 2 > 1$$

dunque la serie non converge (diverge dato che i termini sono positivi).
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+A}$ La serie è a termini positivi. Si ha

$$\frac{\sqrt{1+n}-\sqrt{n}}{n+A} = \frac{1}{(n+A)(\sqrt{1+n}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{2n^{3/2}}\right)$$

e dunque la serie converge assolutamente essendo il termine generale asintotico a $1/n^\alpha$ con $\alpha = 3/2 > 1$.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+A(-1)^n}$ La serie è a termini positivi (il denominatore tende a $+\infty$). Si ha

$$\frac{n}{n^2+A(-1)^n} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+A(-1)^n/n^2} = \frac{1}{n}(1+o(1))$$

e dunque la serie non converge (diverge) dato che il termine generale è asintotico a $1/n$.

2. Utilizzando la sostituzione $y = Ax$ ($x = y/A$, $dx = dy/A$) si perviene a

$$\int_{1/A}^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+Ax)}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(y/A)^2(1+y)}\frac{1}{A}\,dx = A\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2(1+y)}\,dx$$

(ovviamente questo passaggio non è necessario, ma avere $A = 1$ semplifica un po' i numeri che si trovano). L'integrando è una funzione razionale che si può ridurre in fratti semplici:

$$\frac{1}{y^2(1+y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y^2} + \frac{c}{y+1} = \frac{a(y^2+y)+b(y+1)+cy^2}{y^2(y+1)} = \frac{(a+c)y^2+(a+b)y+b}{y^2(y+1)}$$

da cui si trova facilmente che $a = -1$, $b = 1$, $c = 1$. Dunque

$$\int \frac{1}{y^2(1+y)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1}\right) dy = \ln\left(\frac{y+1}{y}\right) - \frac{1}{y} + cost.$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2(1+y)}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{y+1}{y}\right) - \frac{1}{y}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{t+1}{t}\right) - \frac{1}{t} - \ln(2) + 1\right) = 1-\ln(2)$$

(che va moltiplicato per A per avere il risultato richiesto).

3. Sia $f(x,y) := x^4 + y^4 + A^2xy$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x^3 + A^2y, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 4y^3 + A^2x$$

e anche (serve poi)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 12x^2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = A^2, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 12y^2$$

Troviamo i punti stazionari

$$\begin{cases} 4x^3 + A^2y &= 0 \\ 4y^3 + A^2x &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^4 + A^2xy &= 0 \\ 4y^4 + A^2xy &= 0 \end{cases} \Rightarrow 4x^4 = 4y^4 \Rightarrow y = \pm x$$

Usando la condizione $y = \pm x$ nel sistema di partenza si trova $4x^3 \pm A^2x = 0$ che equivale a $x = 0$ ($\Rightarrow y = 0$) oppure $4x^2 \pm A^2 = 0$. La seconda equazione non ha soluzione quando si prende il segno $+$ e quindi rimane $4x^2 = A^2$ che equivale a $x = \pm A/2$ ($y = \mp A/2$). In definitiva i punti stazionari sono $(0,0)$ e $(\pm A/2, \mp A/2)$. Calcolando l'Hessiano in $(0,0)$ si trova

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & A^2 \\ A^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ gli autovalori sono } \pm A^2 \Rightarrow \ (0,0) \text{ è di sella}$$

D 'altra parte il minimo esiste perché $f \to +\infty$ quando $(x,y) \to \infty$ e dunque si realizza in uno dei due punti simmetrici $(\pm A/2, \mp A/2)$ (basta indicarne uno nella risposta).

4. Abbiamo la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x} y + x - 2, \qquad x > 0$$

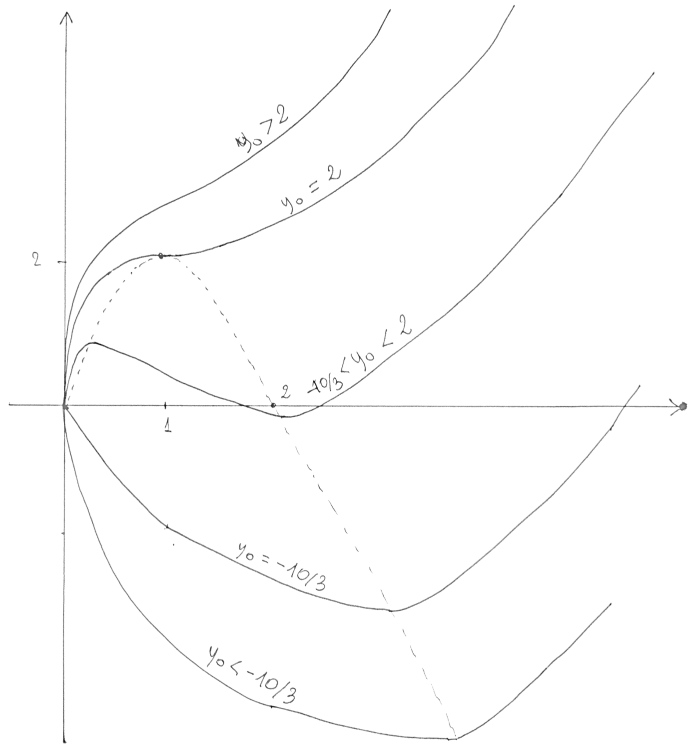
Applicando la formula si trova

$$y(x) = \sqrt{x} \left(y(1) + \int_1^x \frac{t-2}{\sqrt{t}}\, dt \right) = \sqrt{x} \left(y_0 + \left[\frac{2}{3} t^{3/2} - 4t^{1/2} \right]_1^x \right) =$$
$$\left(y_0 + \frac{10}{3} \right) \sqrt{x} + \frac{2}{3} x^2 - 4x$$

Se ne deduce facilmente che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } y_0 > -\frac{10}{3} \\ 0^- & \text{se } y_0 \le -\frac{10}{3} \end{cases}, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

(non è richiesto nelle domande di distinguere 0^+ e 0^-, ma è utile per rispondere al successivo punto e). Per tracciare i grafici è utile chiamare $F(x,y) = \dfrac{1}{2x} y + x - 2$ e studiare il segno di $F(x,y)$, a seconda di (x,y) in $\mathbf{R}^2$. Si vede facilmente che $F(x,y) = 0$ se e solo se $y = 2x(2-x) =: g(x)$. Analogamente $F(x,y) \ge 0$ (≤ 0) se e solo se $y \ge g(x)$ ($y \le g(x)$) - notiamo che stiamo nelle $x > 0$. Tracciamo il grafico di g (una parabola che passa per $(0,0)$ e $(2,0)$ e che ha vertice in $(1,2)$. A questo punto le curve y devono essere crescenti quando $y(x) > g(x)$, decrescenti se $y(x) < g(x)$ e devono incrociare il grafico di g con tangente orizzontale. Se ne ricavano i grafici indicati in figura. Notiamo il cambio di comportamento in zero, quando $y_0 = -10/3$, che si deduce dai limiti.



Dai grafici si deduce che: d) y è cresente (ovunque) se $y_0 \geq 2$; e) y è decrescente su $]0, 1]$ se $y_0 \leq -10/3$.