Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 25 gennaio 2006

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 - 3^{-n} + 1} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(1/n) - 1}{n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Data $f(x) := 3x + 2\mathrm{tg}(x^3) + 1$, calcolare (se esiste) (3p.):

$$(f^{-1})'(1) = \underline{\hspace{6cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

3. Si calcoli il seguente integrale improprio, se esiste (4p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 2}\, dx = \underline{\hspace{6cm}} / \boxed{\text{non esiste}}$$

4. Sia $f(x, y) := x^4 + y^4 + 8xy$. Dando per noto che $|f(x, y)| \to +\infty$ se $\|(x, y)\| \to +\infty$ si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \underline{\hspace{6cm}} / \boxed{f \text{ non ha minimo}}$$

5. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine due per $f(x) := \mathrm{arctg}(2x)$ nel punto $x_0 = 0$ (3p.):

$$P_2(x) = \underline{\hspace{12cm}}.$$

DA SVOLGERE SUL FOGLIO

1. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x)e^{x^2} - 1}{\sin(x^2)\tan^2(x)}$.

2. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{2x} y + x - 4, \qquad x > 0.$$

(a) Dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0, +\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (4p.);

(c) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0, +\infty[$ (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0, 2$ (3p.).

Soluzioni

1. - Se poniamo $a_n := \frac{n(-1)^n}{n+2}$ si vede subito che $|a_n| = \frac{n}{n+2} \to 1$ e dunque a_n *non tende a zero*, per cui la serie $\boxed{\text{non converge}}$.
   - Posto $a_n := \frac{n^2}{n^3+3^{-n}+1}$ si ha che $a_n > 0$ (serie a termini positivi) e che $na_n = \frac{n^3}{n^3+3^{-n}+1} \to 1$. Questo implica che a_n è asintotica alla sucessione $b_n := \frac{1}{n}$ e siccome $\sum b_n = +\infty$ anche la serie di partenza $\boxed{\text{non converge}}$.
   - Poniamo $a_n := \frac{n!}{\sqrt{n^n}}$. Anche in questo caso $a_n > 0$. Applichiamo il criterio del rapporto:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{\sqrt{(n+1)^{(n+1)}}} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} = (n+1)\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}} = \sqrt{n+1}\sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}$$
   e quest'ultima quantità diverge a $+\infty$ dato che $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to 1/e$. Ne segue che la serie $\boxed{\text{non converge}}$.
   - Posto $a_n := \frac{\cos(1/n)-1}{n}$ si vede facilmente che $a_n < 0$ e che $n^3 a_n = \frac{\cos(1/n)-1}{1/n^2} \to -1/2$. Questo implica che a_n è asintotica alla sucessione $b_n := -\frac{1}{2n^3}$ e siccome $\sum b_n < +\infty$ anche la serie di partenza converge e $\boxed{\text{converge assolutamente}}$ visto che, essendo di segno costante, convergenza e convergenza assoluta sono la stessa cosa.

2. Si ha $f(0) = 1$ e dunque $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = 3 + 2\dfrac{1}{1+x^6}3x^2$ e quindi $f'(0) = 3$. Ne segue che
$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}.$$

3. Usando la sostituzione $y = x^2$ si perviene a
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 2x^2 + 2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2 - 2y + 2}\, dy =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(y-1)^2 + 1}\, dy = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(y-1)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

4. Dto che f tende a $+\infty$ quando $\|(x,y)\| \to +\infty$ il minimo deve esistere. Per trovarlo cerchiamo i punti stazionari di $f(x,y) := x^4 + y^4 + 8xy$. Si ha:
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 4x^3 + 8y, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 4y^3 + 8x$$
da cui si deduce che $\nabla f(x,y) = 0$ se e solo se
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^3 \\ x = -\frac{1}{2}y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^3 \\ x = \frac{1}{2^4}x^9 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ oppure } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^3 \\ 1 = \frac{x^8}{2^4} \end{cases}$$
La seconda condizione equivale a
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^3 \\ 2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \mp\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Quindi i punti critici sono $(0,0)$ e $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Però $f(0,0)=0$ mentre $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 4+4+8\cdot\sqrt{2}\cdot(-\sqrt{2}) = -8$ e dunque il minimo si realizza nei due punti $\boxed{\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})}$ (basta indicarne uno).

5. Dato che la funzione è dispari $P_2(x)$ ha sia il termine noto che il termine quadratico eguali a zero, cioè si riduce a $f'(0)x$. Dato che $f'(x) = \frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2$ si ha $f'(0)=2$ e quindi $\boxed{P_2(x)=2x}$.

SECONDA PARTE

1. Si ha:
$$\cos(\sqrt{2}x) = 1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{2}x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$
mentre
$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$
Allora
$$\begin{aligned}&\cos(\sqrt{2}x)e^{x^2} = (1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4))(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)) = \\ &1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4) + x^2(1 - x^2 + o(x^2)) + \frac{x^4}{2}(1 + o(1) + o(x^4)(O(1)) = \\ &1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + x^2 - x^4 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\end{aligned}$$
Inoltre
$$\sin(x^2)\tan^2(x) = (x^2+o(x^2))(x+o(x))^2 = x^4(1+o(1))(1+o(1))^2 = x^4(1+o(1)) = x^4+o(x^4)$$
e quindi
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{2}x)e^{x^2}-1}{\sin(x^2)\tan^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{3}}{x^4} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

2. (a) Dalla formula risolutiva si ha:
$$y(x) = \sqrt{x}\left(y(1) + \int_1^x \frac{4-2t}{\sqrt{t}}\,dt\right) = \sqrt{x}\left(C + 8\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right) = C\sqrt{x} + 8x - \frac{4}{3}x^2$$
dove $C = y(1) + \frac{4}{3} - 8 = y_0 - \frac{20}{3}$.

(b) Dal calcolo precedente si deduce che, indipendentemente da C, cioè da y_0,
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = -\infty$$
Si può anche notare (servirà dopo) che
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left(C + 8\sqrt{x} - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } C \geq 0 \\ 0^- & \text{se } C < 0\end{cases}$$
(nel caso $C=0$ si metta in evidenza x).
Notiamo che il valore $C=0$ corrisponde a $y_0 = \frac{20}{3}$

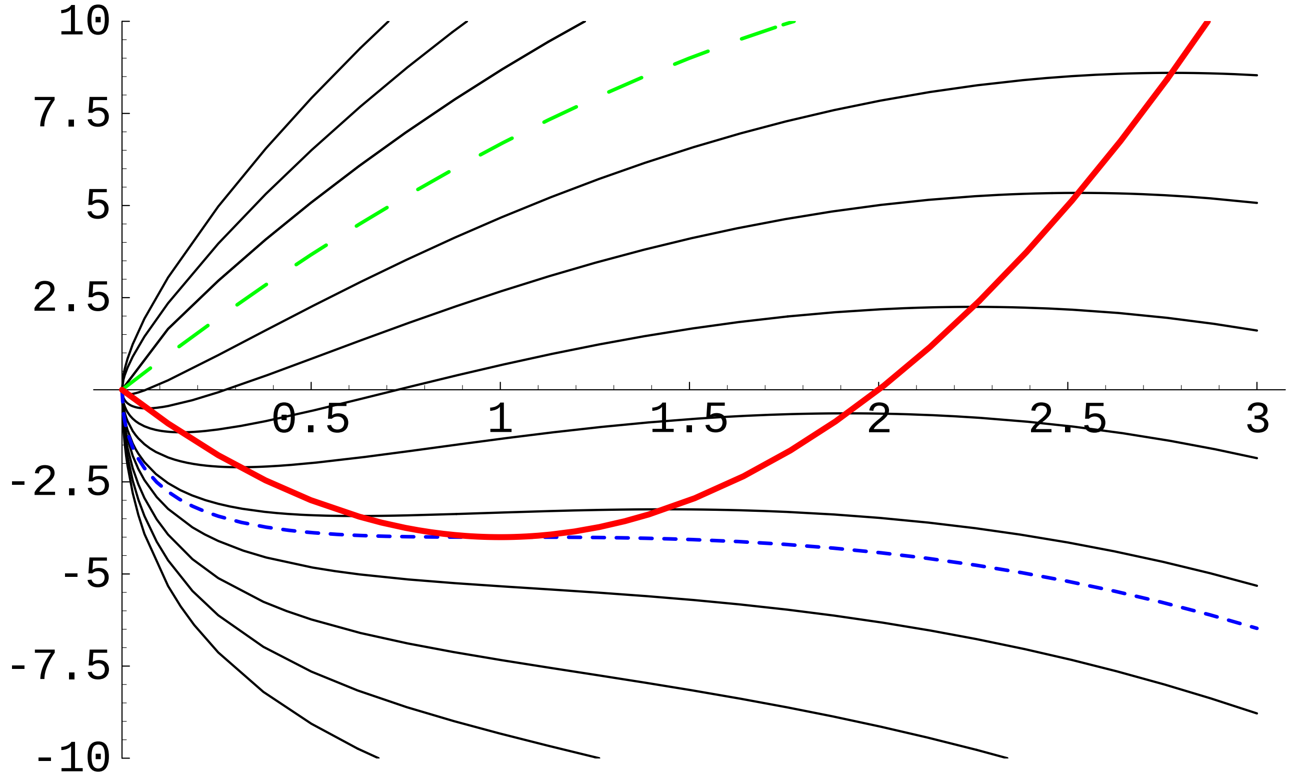
(c) Conviene ora farsi un'idea del grafico delle y. Per questo poniamo $F(x,y) := \frac{y}{2x} + 4 - 2x$ di modo che l'equazione si può esprimere come $y' = F(x,y)$. Individuiamo nel piano cartesiano le coppie (x,y) tali che $x > 0$ e $F(x,y) > 0$. Queste condizioni equivalgono a $x > 0$ e $y > 2x(2x-4) = 4x(x-2)$. Se chiamiamo $g(x) := 4x(x-2)$, allora, nelle $x > 0$,

$$F(x,y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x), \qquad F(x,y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x), \qquad F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Notiamo che il grafico di g è una parabola con la concavità verso l'alto, passante per $(0,0)$ e $(0,2)$ con vertice in $(1,-4)$ e che le informazioni raccolte ci dicono che ogni soluzione y deve essere crescente quando sta sopra la parabola (cioè nelle x in cui $y(x) > g(x)$), deve essere decrescente quando sta sotto la parabola (cioè nelle x in cui $y(x) < g(x)$) e deve avere derivata nulla quando attraversa la parabola ($y(x) = g(x)$). Mettendo insieme questi fatti e i limiti trovati si perviene ai grafici indicati in figura (la curva rossa con tratto spesso è la parabola).

(d) In particolare la soluzione $\bar{y}$ che passa per $(1,-4)$ è tangente alla parabola nel vertice ed è sempre decrescente (curva blu con tratteggio fitto). Tale $\bar{y}$ è quella con $y_0 = -4$. Per $\frac{20}{3} > y_0 > -4$ le curve sono sopra $\bar{y}$ e necessariamente decrescono in un intervallino a destra di zero (dovendo essere $y(t) \to 0^-$ per $t \to 0^+$) incrociano la curva g, crescono per un altro intervallo fino a che non intersecano di nuovo g (lo devono fare poichè $y(t) \to -\infty$ se $t \to +\infty$) e da questo punto decrescono sempre e vanno a meno infinito. Se $y_0 \geq \frac{20}{3}$ le curve sono crescenti vicino a zero fino a quando non attraversano la g (in una x maggiore di 2) e poi vanno decrescendo a meno infinito (la curva con $y_0 = \frac{20}{3}$ è indicata dal colore verde, tratteggio rado). Se invece $y_0 < \bar{y}_0$ le soluzioni stanno sempre sotto $\bar{y}$ e quindi sotto g; dunque sono sempre decrescenti.
In definitiva la risposta alla domanda (d) è per $\boxed{y_0 \leq -4}$ (sotto la curva blu).

(e) Per i motivi esposti nel punto precedente le y crescenti su $[0,2]$ sono quelle con $\boxed{y_0 \geq \frac{20}{3}}$ (sopra la curva verde).


10
7.5
5
2.5
-2.5
-5
-7.5
-10
0.5
1
1.5
2
2.5
3