Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 20 giugno 2006 - A -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+4}{n^2+1}\right)^n = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n)+5n^2}{5-n^2} = \quad -5,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{5\ln(n)+1} = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{5n!+n-1}}{4n+1} = \quad \frac{1}{4e}.$$

2. Data la funzione $f(x)=3^x+5x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{\ln(3)+5}$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x}}{x^2}$.
   Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(4n)}{1+n+n^4} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{5+n+n!} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(5/n)-e^{1/n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{N}\cancel{\text{C}}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4+n^3} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+9}{(x^2+1)^2}\,dx = \qquad 5\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 6xy + e^{x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\ln(\sqrt{3})}, -\sqrt{\ln(\sqrt{3})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2 + \frac{1}{x} \qquad \text{per } x>0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1)=y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x\to 0^+$ e per $x\to+\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x)=0$ ha due soluzioni (distinte e >0) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 20 giugno 2006 - B -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+5}{n^2+1}\right)^n = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n)+2n^2}{5-n^2} = \qquad -2,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2\ln(n)+1} = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{3n!+n-1}}{5n+1} = \qquad \frac{1}{5e}.$$

2. Data la funzione $f(x)=3^x+3x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{\ln(3)+3}$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x}}{x^2}$.
   Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(5n)}{1+n+n^4} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{2+n+n!} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(3/n)-e^{1/n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{5+n^3} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \qquad 2\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 4xy + e^{x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, -\sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2 + \frac{1}{x} \qquad \text{per } x>0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1)=y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x\to 0^+$ e per $x\to+\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x)=0$ ha due soluzioni (distinte e >0) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 20 giugno 2006 - C -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+6}{n^2+1}\right)^n = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n)+3n^2}{5-n^2} = \quad -3,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3\ln(n)+1} = \quad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{4n!+n-1}}{6n+1} = \quad \frac{1}{6e}.$$

2. Data la funzione $f(x)=3^x+4x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{\ln(3)+4}$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x}}{x^2}$.
   Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(6n)}{1+n+n^4} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{3+n+n!} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(4/n)-e^{1/n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{6+n^3} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+5}{(x^2+1)^2}\,dx = \qquad 3\pi$$

3. Sia $f(x,y) := -6xy + e^{x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\ln(\sqrt{3})}, \sqrt{\ln(\sqrt{3})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2 + \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1)=y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x\to 0^+$ e per $x\to+\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x)=0$ ha due soluzioni (distinte e >0) (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 20 giugno 2006 - D -

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matr. ______________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+7}{n^2+1}\right)^n = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\sin(n)+4n^2}{5-n^2} = \qquad -4,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{4\ln(n)+1} = \qquad 1, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{2n!+n-1}}{7n+1} = \qquad \frac{1}{7e}.$$

2. Data la funzione $f(x) = 3^x + 2x$ si ha (2p.) $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{\ln(3)+2}$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x}}{x^2}$.

   Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (4p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(7n)}{1+n+n^4} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-3)^n}{4+n+n!} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos(2/n)-e^{1/n} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{7+n^3} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+7}{(x^2+1)^2}\,dx = \qquad 4\pi$$

3. Sia $f(x,y) := -4xy + e^{x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{2x}y + x - 2 + \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte e > 0) (2p.).

Risoluzione

I simboli A e B, che si incontrano ogni tanto, indicano delle costanti (dipendenti dal compito).

1. (a) Si ha $\left(\frac{n^2+A}{n^2+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{A-1}{n^2+1}\right)}$ e siccome

$$n\ln\left(1+\frac{A-1}{n^2+1}\right) = n\left(\frac{A-1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{A-1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

il limite proposto fa $\boxed{e^0 = 1}$.

(b) Si ha:

$$\frac{n\sin(n)+An^2}{5-n^2} = \frac{n}{5-n^2}\sin(n)+\frac{An^2}{5-n^2}.$$

Il primo addendo tende a zero essendo il prodotto di un infinitesimo (cioè $\frac{n}{5-n^2}$) e di $\sin(n)$ che è limitato. Quindi il limite è eguale al limite del secondo addendo che fa $\boxed{-A}$.

(c) Si ha: $\sqrt[n]{A\ln(n)+1} = e^{\frac{\ln(A\ln(n)+1)}{n}}$. Dato che $0 \leq \frac{\ln(A\ln(n)+1)}{n} \leq \frac{\ln(\ln(n)+\ln(A)}{n} \to 0$, perché, come noto, $\ln(\ln(n))$ va all'infinito più lentamente di qualunque polinomio (volendo si può anche usare de l'Hospital). Dunque il limite proposto fa $\boxed{e^0 = 1}$.

(d) Ricordiamo che $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \to \frac{1}{e}$ e che $\sqrt[n]{A} \to 1$. Allora:

$$\frac{\sqrt[n]{An!+n-1}}{Bn+1} = \frac{\sqrt[n]{A}\,\sqrt[n]{n!}}{Bn}\,\frac{\sqrt[n]{1+n/An!-1/An!}}{1+1/Bn} \to \boxed{\frac{1}{Be}}$$

2. Se $f(x) = 3^x + Ax$ allora $f(0) = 1$, da cui $f^{-1}(1) = 0$. Inoltre $f'(x) = \ln(3)3^x + A$ e dunque $f'(0) = \ln(3) + A$. Allora:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \boxed{\frac{1}{\ln(3)+A}}.$$

3. Si ha:

$$\begin{aligned}
\ln(1+2x) =& 2x - \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 2x - 2x^2 + o(x^2)\\
\sqrt{1-4x} =& 1 + \frac{1}{2}(-4x) - \frac{1}{8}(-4x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x - 2x^2 + o(x^2)\\
&\Rightarrow\\
(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x} =& (1+2x-2x^2+o(x^2))(1-2x-2x^2+o(x^2)) =\\
& 1+2x-2x^2+o(x^2)-2x-4x^2+o(x^2)-2x^2+o(x^2) =\\
& 1-8x^2+o(x^2)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+\ln(1+2x))\sqrt{1-4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{8x^2+o(x^2)}{x^2} = \boxed{8}$$

4. (a) La successione $a_n := \dfrac{n\sin(An)}{1+n+n^4}$ non è a termini positivi perché il termine $\sin(An)$ cambia di segno (in maniera imprevedibile), ma la serie associata è $\boxed{\text{assolutamente convergente}}$ in quanto:

$$|a_n| \leq \frac{n}{1+n+n^4} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ è convergente.

(b) La successione $a_n := \dfrac{n(-3)^n}{A+n+n!}$ non è a termini positivi - in effetti è a segni alterni. Peraltro la serie associata è $\boxed{\text{assolutamente convergente}}$ poiché

$$|a_n| \leq \frac{n3^n}{n!}$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n3^n}{n!}$ è convergente per il criterio del rapporto.

(c) La successione $a_n := \cos(A/n) - e^{1/n}$ è negativa (almeno per n grande), infatti utilizzando Taylor

$$a_n = 1 - \frac{A^2}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

da cui il segno è definitivamente negativo. Dalle stesse considerazioni segue che a_n è asintotiva a $-\dfrac{1}{n}$ e dunque la serie associata $\boxed{\text{diverge}}$.

(d) La successione $a_n := \dfrac{n}{A+n^3}$ è a termini positivi ed è asintotica a $\dfrac{1}{n^2}$ e dunque la serie associata $\boxed{\text{converge assolutamente}}$.

5. Si ha (integrando per parti):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ax^2+B}{(1+x^2)^2}dx = B\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}dx + (A-B)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$B\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)}dx + \frac{(A-B)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx =$$

$$B\left[\text{arctg(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{(A-B)}{2}\left[x\frac{-1}{1+x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{(A-B)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$B\pi + 0 + \frac{(A-B)}{2}\left[\text{arctg(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \boxed{\frac{A+B}{2}\pi}$$

6. Studiamo $f(x,y) = 4xy + e^{x^2+y^2}$ (per le altre si fa in modo simile). Notiamo che $f(x,y) \to +\infty$ se $\|(x,y)\| \to +\infty$, da cui segue che esiste sicuramente il minimo. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 4y + 2xe^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 4x + 2ye^{x^2+y^2}.$$

Cerchiamo i punti stazionari eguagliando a zero entrambe le derivate parziali:

$$\begin{cases} 4y + 2xe^{x^2+y^2} &= 0 \\ 4x + 2ye^{x^2+y^2} &= 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per y,la seconda per x e prendendo la differenza si ottiene $4(y^2 - x^2) = 0$ e quindi deve essere o $y = x$ o $y = -x$. Inseriamo queste condizioni nel sistema iniziale.
Nel caso $y = x$ otteniamo $4x + 2xe^{2x^2} = 0$ da cui o $x = 0$ oppure $4 + 2e^{2x^2} = 0$ che è impossibile (se invece avessimo avuto $-4xy$ questa condizione sarebbe stata buona).
Nel caso $y = -x$ otteniamo di nuovo $x = 0$ oppure $-4 + 2e^{2x^2} = 0$ che è dà il risultato seguente (se invece avessimo avuto $-4xy$ questa condizione sarebbe impossibile):

$$e^{2x^2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = \ln(\sqrt{2}) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\ln(\sqrt{2})}$$

In definitiva troviamo i tre punti $(0,0)$, $\left(\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, -\sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$ e $\left(-\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$.
Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 4+4xye^{x^2+y^2}.$$

Allora la matrice Hessiana nel punto $(0,0)$ è: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ che ha traccia positiva e determinante negativo (e dunque due autovalori discordi). Quindi $(0,0)$ è un punto di sella. Dato che il minimo esiste deve trovarsi negli altri due punti, che però sono equivalenti data la simmetria della funzione.

7. (a) Applicando la formula risolutiva:

$$\begin{aligned} y(x) =& \sqrt{x}\left(y_0 + \int_0^x \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{\sqrt{t}}\, dt\right) = \sqrt{x}\left(y_0 + \int_0^x \left(t^{1/2} - 2t^{-1/2} + t^{-3/2}\right) dt\right) = \\ & \sqrt{x}\left(y_0 + \left[\frac{2}{3}t^{3/2} - 4t^{1/2} - 2t^{-1/2}\right]_0^x\right) = \boxed{C\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^2 - 4x - 2} \end{aligned}$$

dove $C = y_0 + \dfrac{16}{3}$.

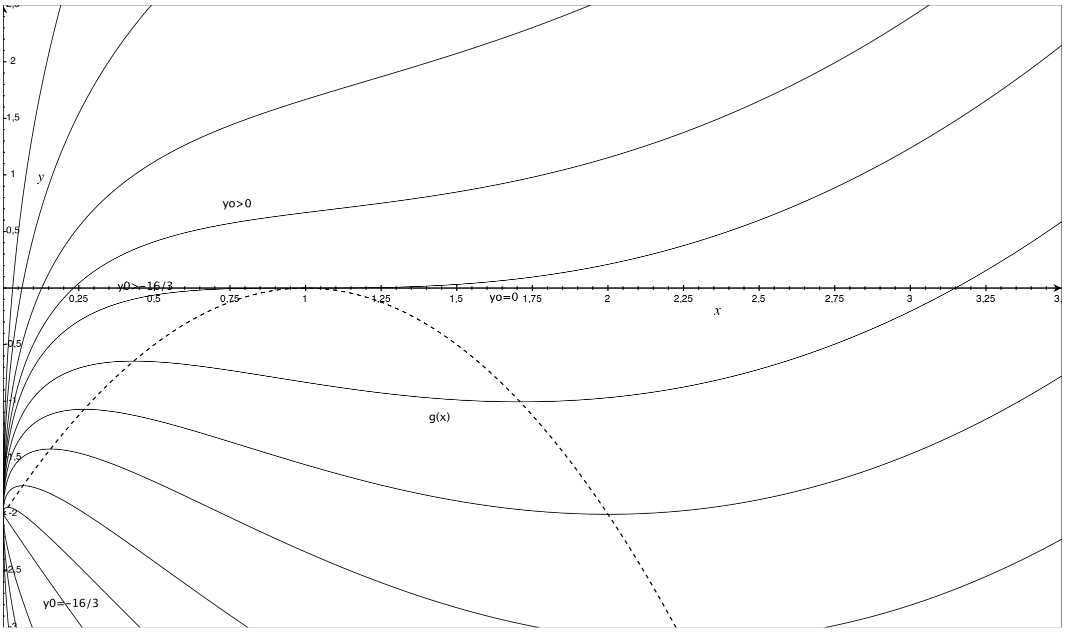
(b) Dall'espressione di $y(x)$ segue facilmente che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \begin{cases} -2^+ & \text{se } C > 0 \Leftrightarrow y_0 > -\dfrac{16}{3} \\ -2^- & \text{se } C \leq 0 \Leftrightarrow y_0 \leq -\dfrac{16}{3} \end{cases}, \qquad \lim_{x \to +\infty^+} y(x) = +\infty \quad (\forall y_0).$$

(c) Per studiare la monotonia delle soluzioni introduciamo la funzione $F(x,y) := \dfrac{y}{2x} + x - 2 + \dfrac{1}{x}$, di modo che l'equazione si scrive $y' = F(x,y)$. Cerchiamo il luogo degli zeri di F (nelle $x > 0$):

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{2x} = -x + 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = -2(x-1)^2 =: g(x)$$

È chiaro allora che, nelle $x > 0$, $F(x,y) > 0$ se e solo se $y > g(x)$ e analogamente $F(x,y) < 0$ se e solo se $y < g(x)$. Tenendo presente che y cresce/decresce dove $F > 0/F < 0$ si perviene ai grafici mostrati in figura.



(d) Dai grafici individuati nel punto precedente si vede subito che $\boxed{\text{non ci sono mai}}$ soluzioni che attraversano due volte l'asse x