Matematica - Ingegneria Gestionale - Compito del 18 luglio 2005 fila A - SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1.
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{5n^2+4}{4n^4+1}\right) = \frac{5}{4}, \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7n^2+1} = 1, \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n} = +\infty$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine cinque per $f(x) = \ln(\cos(2x))$, in $x_0 = 0$ (4p.):
$P_5(x) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4$

3. Se $g(x) = 2^x + 5x$ e $f(x) = g(x^2)$ allora si ha (2p.) $f'(1) = 4\ln(2) + 10$

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x} - 1}{\cos(x) - 1} = 8$$

(Lo svolgimento è in fondo).

SECONDA PARTE

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n}}{4+\sqrt{n^3}} \qquad \boxed{\text{X AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7}+7} \qquad \boxed{\text{X AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+n} - \sqrt{n}) \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{X NC}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+4(-1)^n} \qquad \boxed{\text{X AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+25)^2}\,dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{\pi}{2}$$

3. Sia $f(x,y) := 4x^2 + 4y^2 - 6xy - 2x - 2y$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):
$$(x_{min}, y_{min}) = (1,1)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} - 4, \qquad x > 0$$

I seguenti punti vanno $\boxed{\text{SVOLTI}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 1$ ha due soluzioni (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Compito del 18 luglio 2005 fila B - SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1.
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{2n^2+5}{5n^4+1}\right) = \frac{2}{5}, \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{9n^2+1} = 1, \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n} = +\infty$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine cinque per $f(x) = \ln(\cos(2x))$, in $x_0 = 0$ (4p.):
$P_5(x) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4$

3. Se $g(x) = 2^x + 3x$ e $f(x) = g(x^2)$ allora si ha (2p.) $f'(1) = 4\ln(2) + 6$

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x}-1}{\cos(x)-1} = 8$$

(Lo svolgimento è in fondo).

SECONDA PARTE

1.
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n}}{5+\sqrt{n^3}}$ $\boxed{\xcancel{\text{AC}}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$ $\qquad$ $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7}+9}$ $\boxed{\xcancel{\text{AC}}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+n}-\sqrt{n})$ $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\xcancel{\text{NC}}}$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+5(-1)^n}$ $\boxed{\xcancel{\text{AC}}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}$$

3. Sia $f(x,y) := 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 2x - 2y$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):
$$(x_{min}, y_{min}) = (1,1)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} - 4, \qquad x > 0$$

I seguenti punti vanno $\boxed{\text{SVOLTI}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 1$ ha due soluzioni (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Compito del 18 luglio 2005 fila C - SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1.
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{3n^2+6}{6n^4+1}\right) = \frac{3}{6}, \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5n^2+1} = 1, \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n} = +\infty$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine cinque per $f(x) = \ln(\cos(2x))$, in $x_0 = 0$ (4p.): $P_5(x) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4$

3. Se $g(x) = 2^x + 4x$ e $f(x) = g(x^2)$ allora si ha (2p.) $f'(1) = 4\ln(2) + 8$

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x} - 1}{\cos(x) - 1} = 8$$

(Lo svolgimento è in fondo).

SECONDA PARTE

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n}}{6+\sqrt{n^3}}$$ ~~AC~~ C NC

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7}+5}$$ ~~AC~~ C NC

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$$ AC C ~~NC~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 + 6(-1)^n}$$ ~~AC~~ C NC

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$$

3. Sia $f(x,y) := 6x^2 + 6y^2 - 10xy - 2x - 2y$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):
$$(x_{min}, y_{min}) = (1,1)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} - 4, \qquad x > 0$$

I seguenti punti vanno $\boxed{\text{SVOLTI}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 1$ ha due soluzioni (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Compito del 18 luglio 2005 fila D - SOLUZIONI

PRIMA PARTE

1.
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(\frac{4n^2+7}{7n^4+1}\right) = \frac{4}{7}, \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3n^2+1} = 1, \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n} = +\infty$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine cinque per $f(x) = \ln(\cos(2x))$, in $x_0 = 0$ (4p.):
$P_5(x) = -2x^2 - \dfrac{4}{3}x^4$

3. Se $g(x) = 2^x + 2x$ e $f(x) = g(x^2)$ allora si ha (2p.) $f'(1) = 4\ln(2) + 4$

4.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}\sqrt{1-4x} - 1}{\cos(x) - 1} = 8$$

(Lo svolgimento è in fondo).

SECONDA PARTE

1.
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n}}{7+\sqrt{n^3}}$ $\boxed{\times\ \text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7}+3}$ $\boxed{\times\ \text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$ $\boxed{\text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\times\ \text{NC}}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+7(-1)^n}$ $\boxed{\times\ \text{AC}}$ $\boxed{\text{C}}$ $\boxed{\text{NC}}$

2.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

3. Sia $f(x,y) := 7x^2 + 7y^2 - 12xy - 2x - 2y$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (2p.):
$$(x_{min}, y_{min}) = (1, 1)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} - 4, \qquad x > 0$$

I seguenti punti vanno $\boxed{\text{SVOLTI}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è crescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 1$ ha due soluzioni (3p.).

PRIMA PARTE

1.

$$n^2 \sin\left(\frac{An^2+B}{Bn^4+1}\right) = n^2 \sin\left(\frac{A}{Bn^2} + o(1/n^2)\right) = n^2\left(\frac{A}{Bn^2} + o(1/n^2)\right) \to \frac{A}{B}$$
$$\sqrt[n]{An^2+1} = (\sqrt[n]{n})^2 \sqrt[n]{A+1/n^2} \to 1^2 \cdot 1 = 1$$
$$\frac{\ln(n!)}{n} = \ln\left(\sqrt[n]{n!}\right) \to +\infty \qquad (\sqrt[n]{n!} \to +\infty \text{ perché } (n+1)!/n! \to +\infty)$$

2.

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$$
$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y3) \qquad \Rightarrow$$
$$\ln(\cos(2x)) = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(-2x^2 + o(x^3)\right)^2 + O\left(O(x^2)^3\right) =$$
$$-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\left(4x^4 + o(x^5)\right) + O(x^6) =$$
$$-2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 2x^4 + o(x^5) = -2x^2 - \frac{4}{3}x^4 + o(x^5)$$

3. Se $g(x) = 2^x + Ax$, allora $g'(x) = \ln(2)2^x + A$ e dunque $f'(x) = (g(x^2))' = g'(x^2)2x = (\ln(2)2^x + A)2x$, per cui $f'(1) = 2(\ln(2)2 + A)$.

4.

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{1}{2}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$
$$\sqrt{1-4x} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \frac{1}{8}(-4x)^2 + o(x^2) = 1 - 2x - 2x^2 + o(x^2)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
$$\Rightarrow$$
$$e^{2x}\sqrt{1-4x} = (1 + 2x + 2x^2 + o(x^2))(1 - 2x - 2x^2 + o(x^2)) =$$
$$1 + 2x + 2x^2 + o(x^2) - 2x - 4x^2 + o(x^2) - 2x^2 + o(x^2) = 1 - 4x^2 + o(x^2)$$
$$\Rightarrow$$
$$\frac{e^{2x}\sqrt{1-4x} - 1}{\cos(x) - 1} = \frac{-4x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \to 8$$

SECONDA PARTE

1. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\sqrt[3]{n}}{A+\sqrt{n^3}}$ è a termini negativi. Dato che

$$\frac{1-\sqrt[3]{n}}{A+\sqrt{n^3}} = \frac{1-n^{1/3}}{A+n^{3/2}} = -\frac{1}{n^{7/6}}(1+o(1))$$

e che $\sum \frac{1}{n^{7/6}}$ è convergente $(7/6 > 1)$, la serie proposta è convergente per il criterio del confronto (asintotico). Dato che il segno è costante, la serie è anche assolutamente

convergente.
La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7+A}}$ non ha i termini a segno costante. Dato che $\left|\sin(n)\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7+A}}\right| \leq \frac{2n}{\sqrt[3]{n^7+A}}$, che

$$\frac{2n}{\sqrt[3]{n^7+A}} = \frac{1}{n^{4/3}}(2+o(1))$$

e che $\sum \frac{1}{n^{4/3}}$ è convergente $(4/3 > 1)$, la serie proposta è assolutamente convergente.
La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{1+n}-\sqrt{n})$ è a termini positivi. Si ha

$$\sqrt{1+n}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{1+n}-\sqrt{n})(\sqrt{1+n}+\sqrt{n})}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{1/2}}(1+o(1))$$

e dunque la serie diverge, essendo che $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ è divergente $(1/2 < 1)$.
La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+A(-1)^n}$ é definitivamente a termini positivi. Ricordiamo che $n^{-\epsilon}\ln(n) \to 0$ per qualunque $\epsilon > 0$. Prendendo $\epsilon = 1/2$ si trova che

$$n^{3/2}\frac{\ln(n)}{n^2+A(-1)^n} = n^{-1/2}\ln(n)(1+o(1)) \to 0$$

e dunque, dato che $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge $(3/2 > 1)$ la serie proposta converge per il criterio del confronto asintotico. Dato che i segni sono definitivamente positivi la serie converge assolutamente.

2. Si deve calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+A^2)^2}\,dx$. Usando la sostituzione $x = Ay$ si trova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+A^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2y^2}{(A^2y^2+A^2)^2}\,Ady = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy$$

A questo punto si può usare la riduzione in fratti semplici. Noi però siamo più furbi e notiamo che

$$\frac{y^2}{(y^2+1)^2} = \frac{y}{2}\frac{2y}{(y^2+1)^2} = \frac{y}{2}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)'$$

Integrando per parti si trova:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = \left[\frac{y}{2}\left(-\frac{1}{y^2+1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y^2+1}\,dy = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

(attenzione, nei passaggi sopra sono sottintesi dei limiti a più e meno infinito). Il risultatto finale si trova dividendo per A

3. $f(x,y) := Ax^2 + Ay^2 - Bxy - 2x - 2y$, allora

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 2Ax - 2By - 2, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = 2Ay - Bx - 2$$

Eguagliando a zero:

$$\begin{cases} +2Ax - By &= 2 \\ -Bx + 2Ayx &= 2 \end{cases} \Rightarrow (2A+B)x - (2A+B)y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Inserendo $x = y$ nel sistema iniziale

$$\begin{cases} (2A-B)x & = 2 \\ y & = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{2}{2A-B} = 1 \\ y & = \frac{2}{2A-B} = 1 \end{cases}$$

(i numeri A e B sono tali che $2A - B = 2$). Dunque l'unico punto stazionario è $(1, 1)$. Si vede abbastanza facilmente che $f(x, y) \to +\infty$ se $\|(x, y)\| \to +\infty$ e dunque il minimo deve esistere; ne segue che il punto trovato non può che essere il minimo (assoluto). Si potrebbe anche calcolare l'Hessiano e trovare che ha due autovalori positivi nel punto in esame trovando cosí che si tratta di un minimo locale.

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x} - 4, \qquad x > 0$$

(a) Applicando la formula risolutiva:

$$y(x) = x^3\left(y(1) + \int_1^x \frac{1}{t^3}\left(\frac{1}{t} - 4\right)dt\right) = x^3\left(y_0 + \int_1^x \left(t^{-4} - 4t^{-3}\right)dt\right) =$$
$$x^3\left(y_0 + \left[\frac{1}{-3}t^{-3} - \frac{4}{-2}t^{-2}\right]_1^x\right) = x^3\left(y_0 - \frac{1}{3x^3} + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{3}\right) =$$
$$Cx^3 - \frac{1}{3} + 2x \qquad \text{dove } C = y_0 - \frac{5}{3}$$

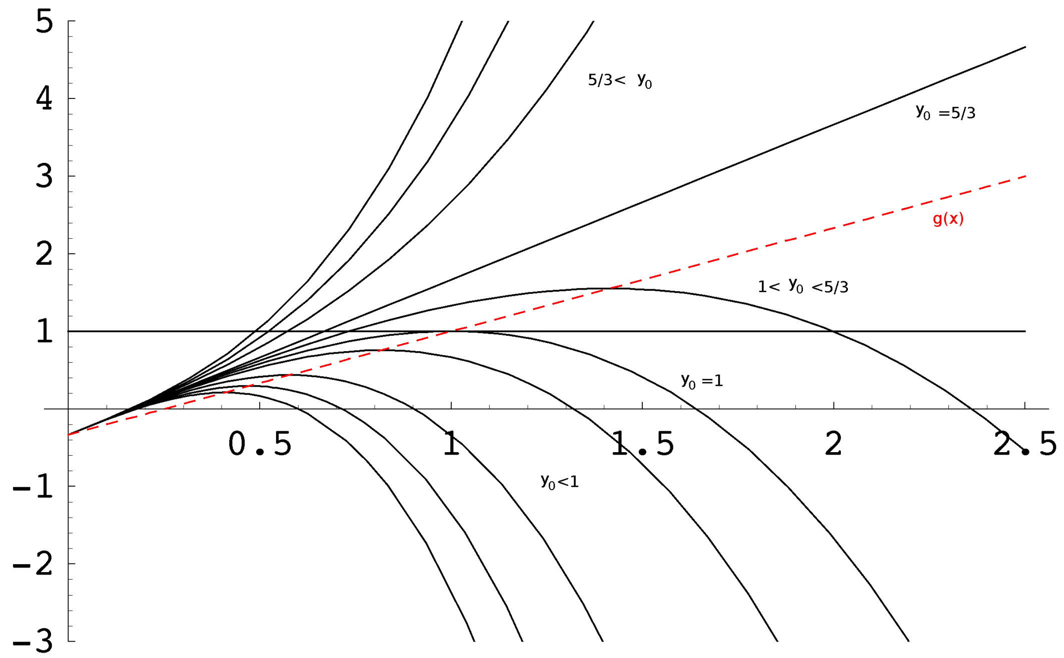
(b) Dalla espressione trovata per $y(x)$ si vede facilmente che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = -\frac{1}{3}^+, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } C \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \geq \frac{5}{3} \\ -\infty & \text{se } C < 0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{5}{3} \end{cases}$$

(c) Per studiare la monotonia di y consideriamo al solito $F(x, y) := \dfrac{3}{x}y + \dfrac{1}{x} - 4$ e studiamo le regioni del piano cartesiano in cui F è positiva/negativa/nulla. Si ha facilmente che:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} =: g(x)$$

e analogamente (nel semipiano delle $x > 0$) $F(x, y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x)$ e $F(x, y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x)$. Se tracciamo il grafico di g (una retta passante per $(0, -1/3)$ e per $(1, 0)$ (linea tratteggiata nella figura che segue) possiamo disegnare il grafico delle y imponendo che abbiano i limiti come sopra e che siano crescenti nella regione $y > g(x)$, decrescenti nella regione $y < g(x)$. Se ne ottiene la figura che segue.



(d) È chiaro dal punto precedente che la soluzione è crescente se e solo se $y_0 \geq 5/3$.

(e) Sempre osservando i grafici si vede che la soluzione $y(x)$ attraversa una sola volta la retta $y = 1$ per $y_0 \geq 5/3$. Inoltre dato che $g(1) = 1$, come si può vedere facilmente, quando $y_0 = 1$ $y(x)$ tocca la retta $y = 1$ nel solo punto $(1, 1)$ (è tangente alla retta). Ne segue che per $y_0 < 1$ non ci sono intersezioni tra $y(x)$ e 1. In definitiva $y(x) = 1$ ha due soluzioni se e solo se $1 < y_0 < 5/3$.