Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 13 settembre 2005 - A -

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-4}\sin(n) = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{7n^2+4^{n/2}} = \sqrt{4}, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(7^n+1)}{n} = \ln(7)$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) = e^{5x}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = e^5\left(1+5(x-1)+\frac{25}{2}(x-1)^2+\frac{125}{6}(x-1)^3\right)$

3. Se $g(x) = 2^x + 5x$ e $f(x) = (g^{-1}(x))^2$ allora si ha (3p.) $f'(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x}-1+x^2}{x^3} = -\frac{4}{3}$.
Per lo svolgimento si vedano le pagine seguenti.

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7n+3} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3^n}{5n-4^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 5xy + e^{x^2+y^2}$. Dando per noto che $\lim_{\|(x,y\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$, si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(\sqrt{\frac{\ln(5)}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln(5)}{2}}\right) \qquad \text{(o il punto opposto)}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{x}y - \frac{1}{x} + 1, \qquad x > 0$$

(a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);

(b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);

(c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);

(d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,+\infty[$ (3p.);

(e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 0$ ha due soluzioni (3p.).

Per lo svolgimento vedere le pagine seguenti.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 13 settembre 2005 - B -

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-5}\sin(n) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{9n^2+5^{n/2}} = \sqrt{5},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(9^n+1)}{n} = \ln(9)$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) = e^{2x}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = e^2\left(1 + 2(x-1) + \frac{4}{2}(x-1)^2 + \frac{8}{6}(x-1)^3\right)$

3. Se $g(x) = 2^x + 3x$ e $f(x) = (g^{-1}(x))^2$ allora si ha (3p.) $f'(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\sqrt{1-2x} - 1 + x^2}{x^3} = -\dfrac{4}{3}$.
Per lo svolgimento si vedano le pagine seguenti.

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{9n+3} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3^n}{2n-4^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 6xy + e^{x^2+y^2}$. Dando per noto che $\lim_{\|(x,y\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$, si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(\sqrt{\frac{\ln(6)}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln(6)}{2}}\right) \qquad \text{(o il punto opposto)}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{x}y - \frac{1}{x} + 1, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 0$ ha due soluzioni (3p.).

   Per lo svolgimento vedere le pagine seguenti.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 13 settembre 2005 - C -

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-6}\sin(n) = 0,\ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5n^2+6^{n/2}} = \sqrt{6},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(5^n+1)}{n} = \ln(5)$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) = e^{3x}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = e^3\left(1 + 3(x-1) + \dfrac{9}{2}(x-1)^2 + \dfrac{27}{6}(x-1)^3\right)$

3. Se $g(x) = 2^x + 4x$ e $f(x) = (g^{-1}(x))^2$ allora si ha (3p.) $f'(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x\sqrt{1-2x} - 1 + x^2}{x^3} = -\dfrac{4}{3}$.
Per lo svolgimento si vedano le pagine seguenti.

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+3} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n+3^n}{3n-4^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 7xy + e^{x^2+y^2}$. Dando per noto che $\lim_{\|(x,y\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$, si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(\sqrt{\frac{\ln(7)}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln(7)}{2}}\right) \qquad \text{(o il punto opposto)}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{x}y - \frac{1}{x} + 1, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 0$ ha due soluzioni (3p.).

   Per lo svolgimento vedere le pagine seguenti.

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 13 settembre 2005 - D -

PRIMA PARTE

1. Si calcolino (6p.)

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-7}\sin(n) = 0, \ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3n^2+7^{n/2}} = \sqrt{7}, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(3^n+1)}{n} = \ln(3)$$

2. Si scriva il polinomio di Taylor di ordine tre per $f(x) = e^{4x}$, in $x_0 = 1$ (3p.):
$P_3(x) = e^4\left(1 + 4(x-1) + \frac{16}{2}(x-1)^2 + \frac{64}{6}(x-1)^3\right)$

3. Se $g(x) = 2^x + 2x$ e $f(x) = (g^{-1}(x))^2$ allora si ha (3p.) $f'(1) = 0$

4. Si calcoli il seguente limite (8p.): $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sqrt{1-2x} - 1 + x^2}{x^3} = -\frac{4}{3}$.
Per lo svolgimento si vedano le pagine seguenti.

SECONDA PARTE

1. Per ognuna delle seguenti serie si indichi se la serie converge assolutamente ($\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente ($\boxed{\text{C}}$) oppure non converge ($\boxed{\text{NC}}$) (4p.).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7n+2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n+3} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n+3^n}{4n-4^n} \quad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio(4p.):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 8xy + e^{x^2+y^2}$. Dando per noto che $\lim_{\|(x,y\|\to\infty} f(x,y) = +\infty$, si trovi un (eventuale) punto di minimo assoluto per f (2p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \left(\sqrt{\frac{\ln(8)}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln(8)}{2}}\right) \qquad \text{(o il punto opposto)}$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{4}{x}y - \frac{1}{x} + 1, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti (se esistono) di $y(x)$ a 0^+ e a $+\infty$ (2p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui y è decrescente su $]0,+\infty[$ (3p.);
   (e) si trovino i valori di y_0, se ce ne sono, per cui $y(x) = 0$ ha due soluzioni (3p.).

Per lo svolgimento vedere le pagine seguenti.

SVOLGIMENTO - PRIMA PARTE

1.
- Il primo limite fa zero perché si tratta del prodotto tra un infinitesimo n^{-k} (k dipende dalla fila) e un termine limitato $\sin(n)$.
- Nel secondo caso si ha (A e B dipendono dalla fila):
$$\sqrt[n]{An^2+B^{n/2}} = \sqrt[n]{An^2+\sqrt{B}^n} = \sqrt{B}\sqrt[n]{\frac{An^2}{\sqrt{B}^n}+1} \to \sqrt{B}\cdot 1 = \sqrt{B}$$
- Nel terzo caso ($A>1$ dipende dalla fila):
$$\frac{\ln(A^n+1)}{n} = \frac{\ln(A^n(1+A^{-n}))}{n} = \frac{n\ln(A)+\ln(1+A^{-n})}{n} \to \ln(A)$$

2. Si ha, utilizzando lo sviluppo di e^x in zero e le prprietà dell'esponenziale:
$$e^{Ax} = e^A e^{A(x-1)} = e^A\left(1+A(x-1)+\frac{1}{2}A^2(x-1)^2+\frac{1}{6}A^3(x-1)^3+o((x-1)^3)\right)$$
da cui la risposta scritta prima.

3. Poniamo $g(x) = 2^x + Ax$ (A dipende dalla fila). Si ha $g(0) = 1$ e quindi $g^{-1}(1) = 0$. Inoltre $g'(x) = \ln(2)2^x + A$ e quindi $g'(0) = \ln(2) + A \neq 0$, da cui g^{-1} è derivabile in 1 e $(g^{-1})'(1) = \dfrac{1}{g'(0)} = \dfrac{1}{\ln(2)+A}$. Peraltro, per la formula di derivazione della funzione composta: $f'(1) = ((g^{-1})^2)'(1) = 2g^{-1}(1)(g^{-1})'(1) = 2\dfrac{0}{\ln(2)+A} = 0$.

4. Si ha:
$$e^x\sqrt{1-2x}-1+x^2 = (1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3))(1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o(x^3))-1+x^2 =$$
$$1-x^2-\frac{4}{3}x^3-1+x^2+o(x^3) = -\frac{4}{3}x^3+o(x^3)$$
da cui
$$\frac{e^x\sqrt{1-2x}-1+x^2}{x^3} = \frac{-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x^3} \to -\frac{4}{3}$$

SVOLGIMENTO - SECONDA PARTE

1. In quanto segue A e B indicano dei parametri dipendenti dalla fila.
- La prima serie è a segni alterni con termine generale $(-1)^n a_n$, dove $a_n = \dfrac{1}{An+1}$. Dato che a_n é decrescente e tende a zero la serie converge per Leibniz. La serie non è assolutamente convergente dato che a_n è asintotico a $\frac{1}{n}$.
- La seconda serie non converge in quanto il suo termine generale a_n non tende a zero. Infatti $|a_n| = \dfrac{n}{An+1} \to \dfrac{1}{A}$.
- La terza serie converge per il criterio del rapporto. Infatti se $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, allora
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$$
Essendo a termini positivi la serie converge anche assolutamente.

- La quarta serie é (definitivamente) a termini negativi. Si può applicare il criterio della radice (cambiando il segno) e si ottiene

$$\sqrt[n]{\frac{An+3^n}{4^n-Bn}} = \frac{3}{4}\sqrt[n]{\frac{3^{-n}An+1}{1-4^{-n}Bn}} \to \frac{3}{4} < 1$$

e dunque la serie converge e converge assolutamente.

2. Si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx =$$
$$\lim_{c\to+\infty} \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{argtg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^c + \lim_{c\to-\infty} \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\operatorname{argtg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_c^0 =$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{argtg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{argtg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

3. Si ha $f(x,y) = Axy + e^{x^2+y^2}$, dove $A > 2$ dipende dalla fila. Notiamo che il minimo assoluto esiste dato che la funzione tende all'infinito quando $\|(x,y)\| \to \infty$. Calcoliamo il gradiente di f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} Ay + 2xe^{x^2+y^2} \\ Ax + 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Cerchiamo i punti stazionari:

$$\begin{cases} Ay + 2xe^{x^2+y^2} = 0 \\ Ax + 2ye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Ay^2 + 2xye^{x^2+y^2} = 0 \\ Ax^2 + 2xye^{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(x^2-y^2) = 0$$

Dunque deve essere $x = y$ oppure $x = -y$. Nel primo caso

$$Ax + 2xe^{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oppure } A + e^{2x^2} = 0$$

e la seconda condizione non ha soluzioni. Nel secondo caso si ha ancora $x = 0$ oppure

$$A - e^{2x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = \ln(A) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\ln(A)}{2}}$$

(notiamo che l'argomento della radice è positivo, dato che $A > 1$). Quindi i punti critici sono

$$(0,0), \qquad \left(\sqrt{\frac{\ln(A)}{2}}, -\sqrt{\frac{\ln(A)}{2}}\right), \qquad \left(-\sqrt{\frac{\ln(A)}{2}}, \sqrt{\frac{\ln(A)}{2}}\right)$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = A + 4xye^{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}$$

A questo punto calcoliamo la matrice Hessiana in $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & A \\ A & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(H_f(0,0)\right) = 4 - A^2 < 0$$

Questo implica che $(0,0)$ è un punto di sella e quindi il minimo non può che trovarsi negli altri due punti stazionari (che sono equivalenti dato che $f(-x,-y) = f(x,y)$).

4. • Troviamo la soluzione:

$$y(x) = x^4\left(y_0 + \int_1^x \left(-\frac{1}{t}+1\right)\frac{1}{t^4}\,dt\right) = x^4\left(y_0 + \int_1^x \left(-\frac{1}{t^5}+\frac{1}{t^4}\right)dt\right) =$$
$$x^4\left(y_0 + \left[\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{3t^3}\right]_1^x\right) = x^4\left(y_0 + \frac{1}{12}+\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{3x^3}\right) = cx^4 + \frac{1}{4} - \frac{x}{3}$$

dove $c = y_0 + \frac{1}{12}$.

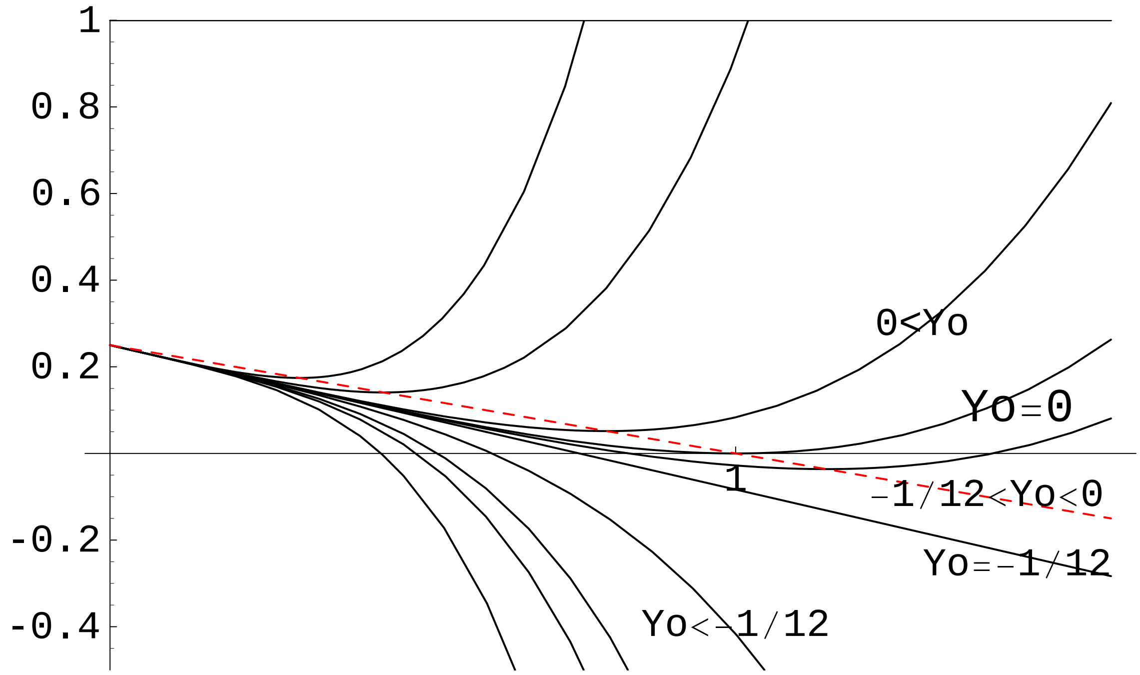
• Dunque

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \frac{1}{4}^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \Leftrightarrow y_0 > -\frac{1}{12} \\ -\infty & \text{se } c \le 0 \Leftrightarrow y_0 \le -\frac{1}{12} \end{cases}$$

• Per tracciare i grafici studiamo le zone del piano in cui la y' è positiva/negativa/nulla. Per questo poniamo $F(x,y) := \dfrac{4}{x}y - \dfrac{1}{x} + 1$, di modo che l'equazione si può scrivere $y' = F(x,y)$. Allora

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{x}{4} \qquad =: g(x)$$

e analogamente (nelle $x > 0$) $F(x,y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x)$, $F(x,y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x)$. Disegnando il grafico di g si possono disegnare i grafici delle soluzioni tenendo presente che y deve essere crescente nelle x in cui $y(x) > g(x)$, decrescente nelle x in cui $y(x) < g(x)$ e deve attraversare il grafico do g con derivata nulla. Si ottengono i grafici riportati in figura (la linea tratteggiata è il grafico di g).



• Dal comportamento descritto al punto precedente si deduce che y è decrescente se e solo se $c \le 0$ e cioé se $y_0 \le -\frac{1}{12}$.

• Sempre esaminando i grafici si vede che y attraversa due volte l'asse delle x se e solo se $-\frac{1}{12} < y_0 < 0$.