Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 10 luglio 2006 - A -

Cognome ____________ Nome ____________ Matr. ____________

PRIMA PARTE / non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty} 4\sqrt[n^2]{n} = \qquad 4, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1+4^n} = \qquad 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4^n - 2n^n}{5+n!} = \qquad -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}+n^2}{4n^2-n+1} = \qquad \frac{1}{4}.$$

2. Sia data la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \sqrt{4n}$. Per ognuna delle successioni $(b_n)_n$ definite di seguito si indichi, barrando la casella corrispondente, se $(b_n)_n$ è una sottosuccessione di $(a_n)_n$ (4p.).

$b_n := n$ $\square$; $b_n = 2n^2$ $\boxed{X}$; $b_n := 4n$ $\boxed{X}$; $b_n := 2n$ $\boxed{X}$.

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0} \frac{(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}}-18}{x^2}$.

Questo esercizio va SVOLTO (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino

1. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro reale α (4p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{1+n^\alpha}$$

La serie converge se $\alpha > 5$; converge assolutamente se $\alpha > 6$.

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella N.E. (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x^2+5}{(4x^2+1)^2}\,dx = \frac{7}{4}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 8xy + e^{4x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\frac{-1}{2}\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{3x}y - x + 2 \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).

(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).

(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione $x > 0$ (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 10 luglio 2006 - B -

Cognome ______________________ Nome ______________________ Matr. ______________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty} 5\sqrt[n^2]{n} = \quad 5, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1+5^n} = \quad 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n - 3n^n}{5+n!} = \quad -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}+n^2}{5n^2-n+1} = \quad \frac{1}{5}.$$

2. Sia data la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \sqrt{9n}$. Per ognuna delle successioni $(b_n)_n$ definite di seguito si indichi, barrando la casella corrispondente, se $(b_n)_n$ è una sottosuccessione di $(a_n)_n$ (4p.).

$$b_n := n \quad \square\ ; \quad b_n = 3n^2 \quad \boxed{\text{X}}\ ; \quad b_n := 9n \quad \boxed{\text{X}}\ ; \quad b_n := 3n \quad \boxed{\text{X}}\ .$$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}}-18}{x^2}$.

Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro reale α (4p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{1+n^\alpha}$$

La serie converge se $\alpha > 2$; converge assolutamente se $\alpha > 3$.

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x^2+3}{(4x^2+1)^2}\, dx = \frac{5}{4}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := 12xy + e^{9x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\frac{-1}{3}\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{3x}y - x + 2 \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).

(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).

(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione $x > 0$ (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 10 luglio 2006 - C -

Cognome ______________ Nome ______________ Matr. ______________

PRIMA PARTE / non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty} 6\sqrt[n^2]{n} = \quad 6, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1+6^n} = \quad 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6^n - 2n^n}{5+n!} = \quad -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}+n^2}{6n^2-n+1} = \quad \frac{1}{6}.$$

2. Sia data la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \sqrt{4n}$. Per ognuna delle successioni $(b_n)_n$ definite di seguito si indichi, barrando la casella corrispondente, se $(b_n)_n$ è una sottosuccessione di $(a_n)_n$ (4p.).

$b_n := n$ ☐ ; $b_n = 2n^2$ [X] ; $b_n := 4n$ [X] ; $b_n := 2n$ [X] .

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\lim_{x\to 0} \frac{(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}}-18}{x^2}$.
Questo esercizio va SVOLTO (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino

1. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro reale α (4p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{1+n^\alpha}$$

La serie converge se $\alpha > 3$; converge assolutamente se $\alpha > 4$.

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella N.E. (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x^2+7}{(4x^2+1)^2}\,dx = \frac{9}{4}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := -8xy + e^{4x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\frac{1}{2}\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{3x}y - x + 2 \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).
(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).
(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).
(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione $x > 0$ (2p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 10 luglio 2006 - D -

Cognome ____________________ Nome ____________________ Matr. ____________________

PRIMA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il primo compitino}}$

1. Si calcolino (8p.)

$$\lim_{n\to+\infty} 7\sqrt[n^2]{n} = \quad 7, \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n^2]{1+7^n} = \quad 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7^n - 3n^n}{5+n!} = \quad -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}+n^2}{7n^2-n+1} = \quad \frac{1}{7}.$$

2. Sia data la successione $(a_n)_n$ definita da $a_n = \sqrt{9n}$. Per ognuna delle successioni $(b_n)_n$ definite di seguito si indichi, barrando la casella corrispondente, se $(b_n)_n$ è una sottosuccessione di $(a_n)_n$ (4p.).

$$b_n := n \quad \square\,; \quad b_n = 3n^2 \quad \boxed{X}\,; \quad b_n := 9n \quad \boxed{X}\,; \quad b_n := 3n \quad \boxed{X}\,.$$

3. Si calcoli il seguente limite (7p.): $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}}-18}{x^2}$.

Questo esercizio va $\boxed{\text{SVOLTO}}$ (sinteticamente) sulle facciate libere di questo foglio.

SECONDA PARTE / $\boxed{\text{non svolgo questa parte - intendo usare il secondo compitino}}$

1. Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro reale α (4p.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^4}{1+n^\alpha}$$

La serie converge se $\alpha > 4$; converge assolutamente se $\alpha > 5$.

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.4)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8x^2+1}{(4x^2+1)^2}\,dx = \frac{3}{4}\pi$$

3. Sia $f(x,y) := -12xy + e^{9x^2+y^2}$. Si trovi un (eventuale) punto di minimo per f (3p.):

$$(x_{min}, y_{min}) = \pm\left(\frac{1}{3}\sqrt{\ln(\sqrt{2})}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$$

4. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{1}{3x}y - x + 2 \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (1p.).

(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (2 p.).

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (2p.).

(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha una ed una sola soluzione $x > 0$ (2p.).

Risoluzione

I simboli A e B, che si incontrano ogni tanto, indicano delle costanti (dipendenti dal compito).

1. (a) Si ha $\sqrt[n^2]{n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \to e^0 = 1$ perché $\frac{\ln(n)}{n^2} \to 0$.

   (b) Si ha (si noti che $A > 1$ e dunque $1/A^n \to 0$):

$$\begin{aligned}\sqrt[n^2]{1+A^n} =& A^{1/n}\sqrt[n^2]{1+1/A^n} = A^{1/n}\exp\left(\frac{\ln(1+1/A^n)}{n^2}\right) = \\ & A^{1/n}\exp\left(\frac{1/A^n + o(1/A^n)}{n^2}\right) = A^{1/n}\exp\left(\frac{1}{n^2A^n} + o\left(\frac{1}{n^2A^n}\right)\right) \to 1e^0 = 1\end{aligned}$$

   (c) Si ha:

$$\frac{A^n - Bn^n}{5+n!} = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\frac{A^n}{n^n} - B}{\frac{1}{n!}+1}\right) \to +\infty(-B) = -\infty$$

   perché $n^n/n! \to +\infty$, $A^n/n^n \to 0$.

   (d) Dividendo numeratore e denominatore per n^2 si ha

$$\frac{\sqrt[n]{n^2}+n^2}{An^2-n+1} = \frac{\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{n^2}+1}{A-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \to \frac{1}{A}$$

   dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$.

2. La successione si può scrivere $a_n = \sqrt{A^2 n} = A\sqrt{n}$. Per vedere se (b_n) è una sottosuccessione di (a_n) bisogna vedere se c'è una (σ_n) successione strettamente crescente di interi tale che $b_n = a_{\sigma_n} = A\sqrt{\sigma_n}$.
   Nel primo caso si avrebbe $n = A\sqrt{\sigma_n}$, cioè $\sigma_n = n^2/A^2$. Dato che n^2/A^2 non è intero per ogni n si ha che tale (σ_n) non esiste e quindi $(n)_n$ non è una sottosuccessione di (a_n).
   Nel secondo caso si ha $An^2 = A\sqrt{\sigma_n}$ cioè $\sigma_n = n^4$ che va bene perché n^4 è intero.
   Nel terzo caso si ha $A^2 n = A\sqrt{\sigma_n}$ cioè $\sigma_n = An^2$ che va ancora bene (An^2 è intero).
   Nel quarto caso si ha $An = A\sqrt{\sigma_n}$ cioè $\sigma_n = n^2$ che va bene pure (n^2 è intero).

3. Si ha:

$$\begin{aligned}&6\cos(x) - x = 6 - x - 3x^2 + o(x^2);\\ &\sqrt{8+e^{3x}} = \sqrt{9+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \\ &3\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}x+o(x)\right)^2+o\left(O(x)^2\right)\right) = \\ &3\left(1+\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2)-\frac{1}{72}x^2+o(x^2)+o(x^2)\right) = 3+\frac{1}{2}x+\frac{17}{24}x^2+o(x^2);\\ &(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}} = (6-x-3x^2+o(x^2))\left(3+\frac{1}{2}x+\frac{17}{24}x^2+o(x^2)\right) = \\ &18-3x-9x^2+3x-\frac{1}{2}x^2+\frac{17}{4}x^2+o(x^2) = 18-\frac{21}{4}x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{x\to 0}\frac{(6\cos(x)-x)\sqrt{8+e^{3x}}-18}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{21}{4}x^2+o(x^2)}{x^2}=\boxed{-\frac{21}{4}}$$

4. Se scriviamo $a_n := \dfrac{n^A}{1+n^\alpha}$ allora la serie assegnata è $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ (serie a segni alterni). Si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > A \\ 1 & \text{se } \alpha = A \\ +\infty & \text{se } \alpha < A \end{cases}$$

quindi la serie non può convergere se $\alpha \le A$ (condizione necessaria). D'altra parte se $\alpha > A$ a_n decresce e dunque applicando il criterio dil Leibniz la serie converge. La convergenza assoluta invece equivale alla convergenza della serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Dato che

$$a_n = \frac{n^A}{n^\alpha}\frac{1}{1/n^\alpha+1} = \frac{1}{n^{\alpha-A}}(1+o(1))$$

si ha che a_n è asintotica a $\dfrac{1}{n^{\alpha-A}}$ e quindi la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^{\alpha-A}}$ converge. Quest'ultima è una serie armonica e converge se e solo se $\alpha - A > 1$ cioè se e solo se $\alpha > A+1$.

5. Si ha (integrando per parti):

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Ax^2+B}{(1+4x^2)^2}dx = B\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4x^2+1}{(1+4x^2)^2}dx+(A-4B)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+4x^2)^2}dx =$$
$$B\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+4x^2)}dx+\frac{(A-4B)}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{8x}{(1+4x^2)^2}dx =$$
$$\frac{B}{2}\left[\text{arctg(2x)}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{(A-4B)}{8}\left[x\frac{-1}{1+4x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{(A-4B)}{8}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+4x^2}dx =$$
$$\frac{B}{2}\pi+0+\frac{(A-4B)}{16}\left[\text{arctg(2x)}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\boxed{\frac{A+4B}{16}\pi}$$

6. Studiamo $f(x,y)=8xy+e^{4x^2+y^2}$ (per le altre si fa in modo simile). Notiamo che $f(x,y)\to +\infty$ se $\|(x,y)\|\to+\infty$, da cui segue che esiste sicuramente il minimo. Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=8y+8xe^{4x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)=8x+2ye^{4x^2+y^2}.$$

Cerchiamo i punti stazionari eguagliando a zero entrambre le derivate parziali:

$$\begin{cases} 8y+8xe^{4x^2+y^2} &= 0 \\ 8x+2ye^{4x^2+y^2} &= 0 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per y,la seconda per x e prendendo la differenza si ottiene $2(y^2-4x^2)=0$ e quindi deve essere o $y=2x$ o $y=-2x$. Inseriamo queste condizioni nel sistema iniziale.

Nel caso $y = 2x$ otteniamo $16x + 8xe^{8x^2} = 0$ da cui o $x = 0$ oppure $1 + 2e^{8x^2} = 0$ che è impossibile (se invece avessimo avuto $-8xy$ questa condizione sarebbe stata buona).
Nel caso $y = -2x$ otteniamo di nuovo $x = 0$ oppure $-16 + 8e^{8x^2} = 0$ che è dà il risultato seguente (se invece avessimo avuto $-8xy$ questa condizione sarebbe impossibile):

$$e^{8x^2} = 2 \Leftrightarrow 8x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{\ln(2)}{8}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{\ln(\sqrt{2})}}{2}$$

In definitiva troviamo i tre punti $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{\ln(\sqrt{2})}}{2}, -\sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{\ln(\sqrt{2})}}{2}, \sqrt{\ln(\sqrt{2})}\right)$.

Calcoliamo le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = (8+64x^2)e^{4x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = (2+4y^2)e^{4x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 8+16xye^{4x^2+y^2}.$$

Allora la matrice Hessiana nel punto $(0,0)$ è: $\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ che ha traccia positiva e determinante negativo (e dunque due autovalori discordi). Quindi $(0,0)$ è un punto di sella. Dato che il minimo esiste deve trovarsi negli altri due punti, che però sono equivalenti data la simmetria della funzione.

7. (a) Applicando la formula risolutiva:

$$\begin{aligned} y(x) =& x^{1/3}\left(y_0 + \int_0^x (-t+2)t^{-1/3}\,dt\right) = x^{1/3}\left(y_0 + \int_0^x \left(-t^{2/3} + 2t^{-1/3}\right)\,dt\right) = \\ & x^{1/3}\left(y_0 + \left[-\frac{3}{5}t^{5/3} + 3t^{2/3}\right]_0^x\right) = \boxed{Cx^{1/3} - \frac{3}{5}x^2 + 3x} \end{aligned}$$

dove $C = y_0 - \dfrac{12}{5}$.

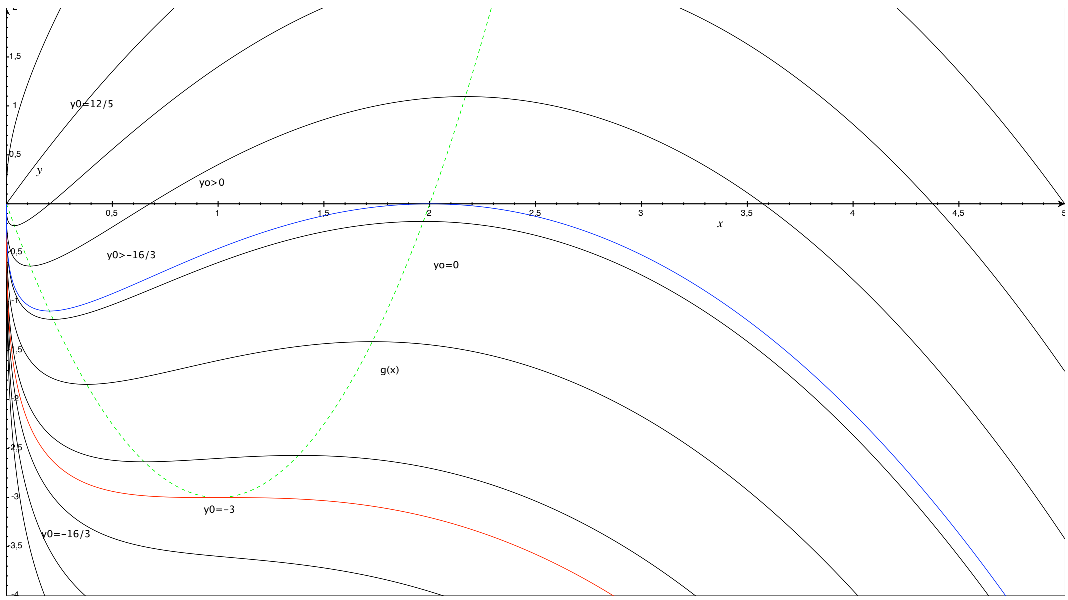
(b) Dall'espressione di $y(x)$ segue facilmente che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \begin{cases} 0^+ & \text{se } C \geq 0 \Leftrightarrow y_0 \geq 12/5 \\ 0^- & \text{se } C < 0 \Leftrightarrow y_0 < 12/5 \end{cases}, \qquad \lim_{x\to+\infty^+} y(x) = -\infty \quad (\forall y_0).$$

(c) Per studiare la monotonia delle soluzioni introduciamo la funzione $F(x,y) := \dfrac{y}{3x} - x + 2$, di modo che l'equazione si scrive $y' = F(x,y)$. Cerchiamo il luogo degli zeri di F (nelle $x > 0$):

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{3x} = x - 2 \Leftrightarrow y = 3x(x-2) =: g(x)$$

È chiaro allora che, nelle $x > 0$, $F(x,y) > 0$ se e solo se $y > g(x)$ e analogamente $F(x,y) < 0$ se e solo se $y < g(x)$. Tenendo presente che y cresce/decresce dove $F > 0/F < 0$ si perviene ai grafici mostrati in figura.



(d) Dai grafici individuati nel punto precedente si vede subito che per avere una ed una sola intersezione con l'asse x (in una $x > 0$) bisogna che $\boxed{y_0 > 12/5}$.