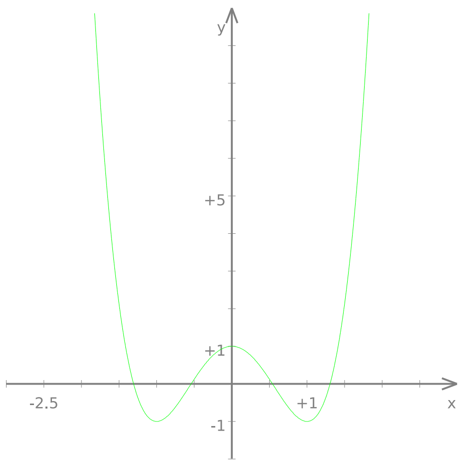
Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 16 luglio 2007 - SOLUZIONI

1. Se $f(x) := 2x^4 - 4x^2 + 1$ per x in $\mathbf{R}$, allora (PUNTI: 1/-1/0 a risposta)

1 è massimo per f	NO	(è solo massimo relativo)
1 è punto di massimo relativo per f	NO	(è punto di minimo)
1 è punto stazionario per f	SI'	(corrispondente al minimo)
-1 è punto di minimo relativo per f	SI'	(minimo implica minimo relativo)
-1 è punto di massimo relativo per f	NO	
-1 è minimo per f	SI'	

Svolgimento. Basta fare il grafico di f (vedi figura) e applicare le definizioni.



□

2. Si trovi il valore dei seguenti limiti (PUNTI: 2/-0/0 ciascuno)

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1) = \quad \ln(2) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)!}{n^n}} = \quad \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^n = \quad 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n^2} = \quad 0.$$

Svolgimento.

$$n(\sqrt[n]{2}-1) = \frac{2^{1/n}-1}{1/n} = \frac{e^{\ln(2)/n}-1}{1/n} = \ln(2)\frac{e^{\ln(2)/n}-1}{\ln(2)/n} \to \ln(2),$$

$$\text{se } a_n = \frac{(n+1)!}{n^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!n^n}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} = \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e},$$

$$\left(\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)} = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{3n^2+2}\right)} = \left(e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{3n^2+2}\right)}\right)^{1/n} \to \left(e^{-1/3}\right)^0 = 1,$$

$$\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)} = e^{n^2\ln\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)} = \left(e^{n\ln\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)}\right)^n \to \left(e^{-1/3}\right)^{+\infty} = 0$$

□

3. Data f definita da $f(x) := 3^x + 2x + 1$ e posto $g(x) := f(x)^2$ si ha (PUNTI: 2/-0,5/0 per risposta)

$$(f^{-1})'(2) = \boxed{\frac{1}{\ln(3)+2}}$$

$$g'(2) = \boxed{252\ln(3)+56}$$

Svolgimento. Si ha $f(0) = 2$ da cui $f^{-1}(2) = 0$, Inoltre $f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{\ln(3)x}+2x+1) = \ln(3)e^{\ln(3)x}+2 = \ln(3)3^x+2$. Allora $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln(3)+2}$. Per quanto riguarda la seconda domanda si ha

$$g'(2) = \left.\frac{d}{dx}f(x)^2\right|_{x=2} = 2f(x)f'(x)|_{x=2} = 2(9+4+1)(\ln(3)9+2) = 252\ln(3)+56.$$

□

4. Si calcoli il limite seguente - questo esercizio va svolto e vale 6 punti.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}\sqrt{1+2x}-1}{\tan(x^2)} = -1$$

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned}
&e^{-x}\sqrt{1+2x} = \left(1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1+x-\frac{x^2}{2}+o(x)\right) = \\
&1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x-x^2+o(x^2)-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+o(x^2) = 1-x^2+o(x^2); \\
&\tan(x^2) = x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

Dunque

$$\frac{e^{-x}\sqrt{1+2x}-1}{\tan(x^2)} = \frac{-x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \to -1.$$

□

5. Si trovi il carattere delle seguenti serie ($\boxed{\text{AC}}$) converge assolutamente/ $\boxed{\text{C}}$ converge ma non assolutamente/ $\boxed{\text{NC}}$ non converge) (PUNTI: 2/-1/0 per ciascuna).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!+1} \quad \boxed{\text{AC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n} \quad \boxed{\text{AC}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\arctan(n)} \quad \boxed{\text{NC}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \boxed{\text{C}}$$

Svolgimento.

$$\text{se } a_n = \frac{n!+1}{(n+2)!+1} \Rightarrow a_n \geq 0, a_n \approx \frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \approx \frac{1}{n^2} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge;}$$

$$\text{se } a_n = \frac{(-1)^n n!}{n^n} \Rightarrow \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ converge per il criterio del rapporto;}$$

$$\text{se } a_n = \frac{(-1)^n}{\arctan(n)} \Rightarrow |a_n| \to \frac{2}{\pi} \neq 0 \Rightarrow a_n \text{ non tende a zero;}$$

$$\text{se } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow |a_n| \text{ decresce e tende a zero} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n |a_n| \text{ converge per Leibniz,}$$

$$\text{però} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \text{ diverge essendo } 1/2 < 1.$$

□

6. Si indichi la risposta corretta (N.D.P=nessuna delle precedenti) (PUNTI: 4/-1/0).

$$\int_2^{+\infty} \frac{10}{(x^2+4)(x^2-1)}\, dx = \boxed{\frac{-\pi + \ln(81)}{4}}$$

OPPURE

$$\int_1^{+\infty} \frac{10}{(x^2+1)(4x^2-1)}\, dx = \boxed{\frac{-\pi + \ln(81)}{2}}$$

Svolgimento.

$$\frac{10}{(x^2+4)(x^2-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} =$$
$$\frac{-B+4C-4D+(-A+4C+4D)x+(B+C-D)x^2+(A+C+D)x^3}{(x^2+4)(x^2-1)}$$

e quindi

$$\begin{cases} -B + 4C - 4D = 10 \\ -A + 4C + 4D = 0 \\ B + C - D = 0 \\ A + C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ C + D = 0 \\ B = -2 \\ C - D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -2 \\ C = 1 \\ D = -1 \end{cases}$$

da cui

$$\int_2^{+\infty} \frac{10}{(x^2+4)(x^2-1)}\, dx = \int_2^{+\infty} \left(\frac{-2}{x^2+4} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$
$$-\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x/2)^2+1}\, dx + \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[-\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]_2^{+\infty} =$$
$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi}{4} + \ln(3) = \frac{-\pi + \ln(81)}{4}.$$

Il secondo integrale si fa in maniera analoga. Possiamo anche ricavarlo dal primo mediante la sostituzione $y = 2x$, da cui $x = y/2$ e $dx = (1/2)dy$ e

$$\int_1^{+\infty} \frac{10}{(x^2+1)(4x^2-1)}\, dx = \int_2^{+\infty} \frac{10}{((y/2)^2+1)(4(y/2)^2-1)} (1/2)dy = 2\int_2^{+\infty} \frac{10}{(y^2+4)(y^2-1)}\, dy$$

Gli altri integrali assegnati avevano 5 al posto di 10 al numeratore e quindi sono la metà di quelli indicati sopra. □

7. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy (PUNTI: 4/-0/0)

$$\begin{cases} y'' + 4y = 1. \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{OPPURE} \qquad \begin{cases} y'' + 4y = x. \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{4} \qquad\qquad y(x) = \frac{2x - \sin(2x)}{8}$$

Svolgimento. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è $p(z) = z^2 + 4$ cha ha radici $\pm 2i$. Ne segue che le soluzioni dell'omogenea sono date da $y(x) = \gamma \cos(2x) + \delta \sin(2x)$ al variare di γ e δ tra i reali. Cerchiamo una soluzione particolare $\bar{y}$. Nel caso della prima equazione si può cercare $\bar{y}(x) = A$ e si vede subito che deve essere $A = 1/4$. Nel secondo caso si può cercare $\bar{y}(x) = Ax$, e anche in questo caso si vede immediatamente che $A = 1/4$. Dunque la famiglia completa delle soluzioni è descritta da

$$y(x) = \gamma \cos(2x) + \delta \sin(2x) + \frac{1}{4} \quad \text{(rispettivamente} \quad y(x) = \gamma \cos(2x) + \delta \sin(2x) + \frac{x}{4}.$$

Inseriamo la condizione iniziale nella soluzione della prima equazione: $y(0) = \gamma + 1/4 = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1/4$; inoltre $y'(x) = -2\gamma \sin(2x) + 2\delta \cos(2x)$ da cui $y'(0) = 2\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ e quindi $y(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{4}$. Analogamente per la seconda equazione $y(0) = \gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = 0$; inoltre $y'(x) = -2\gamma \sin(2x) + 2\delta \cos(2x) + 1/4$ da cui $y'(0) = 2\delta + 1/4 = 0 \Leftrightarrow \delta = -1/8$ e quindi $y(x) = \dfrac{2x - \sin(2x)}{8}$. Per quanto riguarda le altre due file la traccia aveva 2 e $2x$ al posto di 1 e x e quindi le soluzioni sono esattamente il doppio di quelle indicate sopra. □

8. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{2xy}{1 + x^2} - 1 \qquad , \quad y(0) = y_0.$$

Si studino le soluzioni per $x \geq 0$, trovando in particolare (8 punti in tutto - da svolgere):

- l'espressione delle soluzione con condizione iniziale $y(0) = y_0$, dato y_0 in $\mathbf{R}$;
- il limite a $+\infty$ di tale soluzione (al variare di y_0);
- i grafici (per $x \geq 0$) relativi alle soluzioni *più significative*;
- per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ha tre distinte soluzioni.

.

Svolgimento. Se scriviamo l'equazione come $y' = a(x)y - 1$ allora, usando la formula risolutiva

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 - \int_0^x e^{-A(t)}\, dt \right) \qquad \text{dove } A(x) = \int_0^x a(t)\, dt$$

Quindi

$$A(x) = \int_0^x \frac{2t}{1 + t^2}\, dt = \left[\ln(1 + t^2)\right]_0^x = \ln(1 + x^2)$$

e

$$y(x) = (1 + x^2) \left(y_0 - \int_0^x \frac{1}{1 + t^2}\, dt \right) = (1 + x^2)\,(y_0 - [\arctan(t)]_0^x) = (1 + x^2)\,(y_0 - \arctan(x))\,.$$

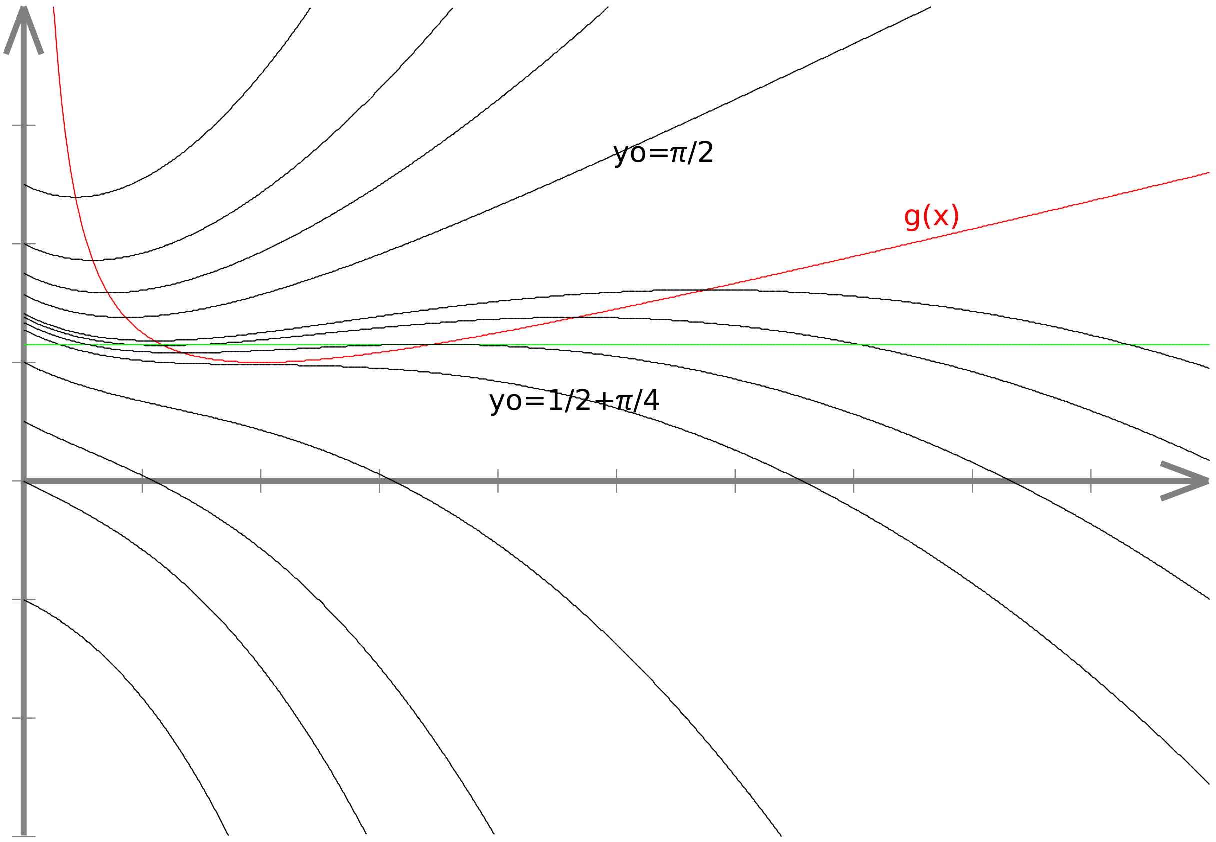
Notiamo che la soluzione y è definita su tutto $\mathbf{R}$ - la traccia, però, chiede di studiarla solo per $x \geq 0$. Si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 \geq \frac{\pi}{2} \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Tali limiti sono evidenti se $y_0 \neq \frac{\pi}{2}$; nel caso $y_0 = \frac{\pi}{2}$ si può usare il teorema di de l'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + x^2)\,(\pi/2 - \arctan(x)) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(x)}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + x^2}{2x} = +\infty.$$

Notiamo anche che non c'è bisogno di fare il limite in zero dato che $y(0) = y_0$ per definizione. Per studiare i grafici delle soluzioni introduciamo $F(x,y) := \frac{2xy}{1+x^2} - 1$ di modo che l'equazione si scrive $y' = F(x,y)$ e studiamo le zone del piano xy in cui $F > / = / < 0$. Si ha $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{1+x^2}{2x}$ (dovendo essere $x \neq 0$ dato $F(0,y) = -1 < 0$ per ogni y). Poniamo $g(x) := \dfrac{1+x^2}{2x}$ per $x \neq 0$; allora limitandoci alle $x > 0$ si ha $F(x,y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x)$ e viceversa $F(x,y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x)$ (se considerassimo anche le $x < 0$ dovremmo invertire le diseguaglianze). Usando il fatto che le soluzioni y devono essere crescenti fino a quando rimangono nella zona con $F(x,y) > 0$, decrescenti fino a quando rimangono nella zona con $F(x,y) < 0$ e devono attraversare la zona $F(x,y) = 0$ (cioè il grafico di g) con derivata nulla si perviene ai grafici illustrati nella figura, in cui il grafico di g è rappresentato dalla linea rossa.



In particolare la *prima curva sempre decrescente* è quella che pass per $(1,1)$, cioè tale che:

$$1 = (1+1)(y_0 - \arctan(1)) \Leftrightarrow 1 = 2\left(y_0 - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Per rispondere all'ultimo quesito cerchiamo le intersezioni tra il grafico di g e la retta $y = 2\sqrt{3}/3$ (linea verde). Si trovano i due punti $P_1 := \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e $P_2 := \left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. La soluzione y_1 che passa per P_1, cioè tale che $y_1(\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/3$, è individuata da

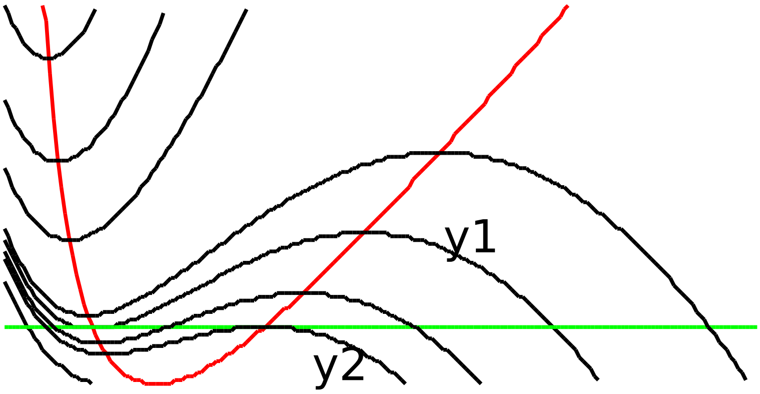
$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(y_0 - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}\left(y_0 - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

Si vede facilmente che $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$; ne segue che $y_1(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi y_1 è tangente alla retta $y = 2\sqrt{3}/3$ (da sopra, in $x = \sqrt{3}/3$) e la riattraversa in una x grande.

La soluzione y_2 che passa per P_2, cioè tale che $y_2(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}/3$, è individuata da

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = (1+3)\left(y_0 - \arctan\left(\sqrt{3}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}}{3} = 4\left(y_0 - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow y_0 = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{3}.$$

Non è difficile vedere che $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{3} < \frac{2\sqrt{3}}{3} = y_2(0)$; ne segue che $y_2(x)$ è tangente alla retta $y = 2\sqrt{3}/3$ (da sotto, in $x = \sqrt{3}$) e la riattraversa in una x vicino a zero. La sitazione si vede meglio nella figura seguente, che ingrandisce la precedente attorno alla retta $y = 2\sqrt{3}/3$.



Da tutto questo si deduce che ci sono tre intersezioni con la retta se e solo se $\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\pi}{3} < y_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$. □