MATEMATICA - Ingegneria Gestionale - Compito del 31 maggio -SOLUZIONI-

A1 Si consideri la successione (a_n) definita da $a_n := \dfrac{n+A}{n+1}$. Allora si vede facilmente che (a_n) è decrescente e tende a uno (si noti che $a_n = 1 + (A-1)/(n+1)$). Dunque

$$\sup_{n\geq 1} a_n = a_1 = (1+A)/2 \quad \text{È IL MAX} \quad , \quad \inf_{n\geq 1} a_n = 1 \quad \text{NON È IL MIN}$$

A2 Si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+n^{2n}}{n!-n^n}$. Si ha:

$$\frac{1+n^{2n}}{n!-n^n} = \frac{n^{2n}}{n^n}\frac{1/n^{2n}+1}{n!/n^n-1} = \left(\frac{n^2}{n}\right)^n \frac{1+o(1)}{o(1)-1} = n^n(-1+o(1)) \to -\infty$$

(si è usato il fatto che $n!/n^n \to 0$).

A3 Si dica per quali valori del parametro reale α la serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^k+3}{n^h+n}(\alpha - A)^n$ risulta convergente. Poniamo $a_n := \dfrac{n^k+3}{n^h+n}(\alpha-A)^n$. Applichiamo il criterio della radice ad $|a_n|$ Si vede facilmente che $\sqrt[n]{|a_n|} \to |\alpha - A|$. Se ne deduce che:
a) se $|\alpha - A| < 1$, la serie converge assolutamente (e dunque converge);
b) se $|\alpha - A| > 1$, il termine $|a_n|$ non tende a zero e dunque a_n non tende a zero per cui la serie non converge.
Rimangono i due casi in cui $|\alpha - A| = 1$. In questi casi si ha $|a_n| = \dfrac{n^k+3}{n^h+n}$ che è una successione asintotica a $b_n := \dfrac{1}{n^{h-k}}$. Dato che $h-k \geq 2$ la serie dei b_n converge (serie armonica di esponente maggiore di uno) e dunque la serie degli a_n è assolutamente connvergente.
In definitiva la serie converge se e solo se $|\alpha - A| \leq 1$, cioè $A-1 \leq \alpha \leq A+1$.

B1 Data f definita da $f(x) := Ae^{x-1} + B\ln(x)$ si ha $f(1) = A$ per cui $f^{-1}(A) = 1$. Inoltre $f'(x) = Ae^{x-1} + B/x$. Quindi

$$(f^{-1})'(A) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{A+B}$$

B2 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin^2(Ax)}{\sqrt{\cos(2x)} - e^{-x^2}}$$

Usiamo Taylor.
· $\sin^2(Ax) = (Ax + o(x))^2 = A^2x^2 + 2Ax\ o(x) + o(x)^2 = A^2x^2 + o(x^2)$ da cui
· $x^2\sin^2(Ax) = A^2x^4 + o(x^4)$;
· $\cos(2x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + \dfrac{(2x)^4}{24} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)$ da cui

· $\sqrt{\cos(2x)} = 1 + \dfrac{\cos(2x)-1}{2} - \dfrac{(\cos(2x)-1)^2}{8} + o((\cos(2x)-1)^2) =$
$1 + \dfrac{1}{2}\left(-2x^2 + \dfrac{2x^4}{3} + o(x^4)\right) - \dfrac{1}{8}\left(-2x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(O(x^2))^2) =$
$1 - x^2 + \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4) = 1 - x^2 - \dfrac{1}{6}x^4 + o(x^4)$ e infine

· $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{1}{2}x^4 + o(x^4)$ da cui

· $\sqrt{\cos(2x)} - e^{-x^2} = -\dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$ e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2(Ax)}{\sqrt{\cos(2x)} - e^{-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{A^2x^4 + o(x^4)}{-\frac{2}{3}x^4 + o(x^4)} = -\frac{3A^2}{2}$$

C1 Si calcoli l'integrale improprio $\displaystyle\int_A^{4A} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{4A-x}{x-A}}\,dx.$

Usando la sostituzione $t := \sqrt{\dfrac{4A-x}{x-A}}$ si ha:

$$x = A\frac{t^2+4}{t^2+1} \quad , \qquad dt = \frac{-6At\,dt}{(t^2+1)^2}$$

per cui l'integrale diventa

$$\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{A}\frac{t^2+1}{t^2+4}t\frac{-6At}{(t^2+1)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{6t^2}{(t^2+4)(t^2+1)}\,dt$$

Riduciamo la funzione razionale integranda in fratti semplici: dato che tale funzione dipende solo da t^2 conviene scrivere

$$\frac{6s}{(s+4)(s+1)} = \frac{a}{s+4} + \frac{b}{s+1} = \frac{(a+b)s + a + 4b}{(s+4)(s+1)}$$

che, risolvendo il sistema, dà $a = 8$, $b = -2$. Dunque l'integrale diventa:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{8}{(t^2+4)} - \frac{2}{(t^2+1)}\right) dt = 2\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{(t/2)^2+1)} - \frac{1}{(t^2+1)}\right) dt =$$
$$2\left[2\arctan(t/2) - \arctan(t)\right]_0^{+\infty} = 2(\pi - \pi/2) = \pi$$

C2 Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = Ay - e^{-x} \quad , \quad y(0) = y_0 \qquad x \in \mathbf{R}$$

(a) Applicando la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine si trova

$$y(x) = e^{Ax}\left\{y_0 - \int_0^x e^{-t-At}\,dt\right\} = e^{Ax}\left\{C + \frac{1}{1+A}e^{-(1+A)x}\right\} = Ce^{Ax} + \frac{1}{1+A}e^{-x}$$

dove $C = y_0 - 1/(1+A)$;
(b) si vede facimente che:

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } C>0 \Leftrightarrow y_0 > \frac{1}{1+A} \\ 0 & \text{se } C=0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{1+A} \\ -\infty & \text{se } C<0 \Leftrightarrow y_0 < \frac{1}{1+A} \end{cases}$$

(c) per tracciare i grafici delle soluzioni conviene introdurre $F(x,y) := Ay - e^{-x}$ e notare che $F(x,y) = 0$ (rispettivamente $> 0/ < 0$) se $y = g(x)$ ($y > g(x)/y < g(x)$), dove $g(x) := \dfrac{1}{A}e^{-x}$. Allora, tenendo presente che le $y(x)$ crescono/decrescono nella zona in cui $F(x,y) > 0$ / $F(x,y) > 0$, i grafici sono grosso modo quelli indicati in figura (è stato disegnato il caso $A = 2$; la curva che interseca “di traverso” le altre è il grafico di g).