Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 22 maggio 2006 - A -

Cognome ______________________ Nome ______________________ matr. __________

PRIMA PARTE (contano <u>solo</u> le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (6p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+n!} \qquad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(1/n) - 3^{1/n^2} \qquad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+3^{-n}+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{N}\cancel{\text{C}}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+3}{(x^2+1)(x+1)}\, dx = \pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 9x^2 + y^2 - e^{xy}$. Si trovino tutti i punti stazionari indicando per ognuno di essi se si tratta di un massimo relativo, di un minimo relativo, di una sella oppure nessuno dei precedenti. (N.B. non ce ne sono più di quattro!) (5 p.)

   - $P_1 = (0,0)$ MINIMO
   - $P_2 = \left(\sqrt{\frac{\ln(6)}{3}}, \sqrt{3\ln(6)}\right)$ SELLA
   - $P_3 = -\left(\sqrt{\frac{\ln(6)}{3}}, \sqrt{3\ln(6)}\right)$ SELLA

4. Si scriva la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 25y = x$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. (3p.)

$$y(x) = \frac{e^{5x} - e^{-5x} - 10x}{250}$$

SECONDA PARTE (da svolgere <u>sinteticamente</u> nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (2p.).

   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (4 p.).

   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (4p.).

   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 22 maggio 2006 - B -

Cognome ______________________ Nome ______________________ matr. __________

PRIMA PARTE (contano <u>solo</u> le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (6p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(1/n) - 4^{1/n^2} \qquad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3+4^{-n}+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{1+n!} \qquad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{(x^2+1)(x+1)}\, dx = \frac{3}{4}\pi, \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2 + 9y^2 - e^{xy}$. Si trovino tutti i punti stazionari indicando per ognuno di essi se si tratta di un massimo relativo, di un minimo relativo, di una sella oppure nessuno dei precedenti. (N.B. non ce ne sono più di quattro!) (5 p.)

   - $P_1 = (0,0)$ MINIMO
   - $P_2 = \left(\sqrt{3\ln(6)}, \sqrt{\frac{\ln(6)}{3}}\right)$ SELLA
   - $P_3 = -\left(\sqrt{3\ln(6)}, \sqrt{\frac{\ln(6)}{3}}\right)$ SELLA

4. Si scriva la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 4y = x$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. (3p.)

$$y(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x} - 4x}{16}$$

SECONDA PARTE (da svolgere <u>sinteticamente</u> nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (2p.).

   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (4 p.).

   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (4p.).

   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 22 maggio 2006 - C -

Cognome ____________________ Nome ____________________ matr. ________

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (6p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{1+n!} \qquad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{6+5^{-n}+n^2} \qquad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\cancel{\text{NC}}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \cos(1/n) - 5^{1/n^2} \qquad \boxed{\cancel{\text{AC}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx = \frac{3}{4}\pi \ \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := 4x^2 + y^2 - e^{xy}$. Si trovino tutti i punti stazionari indicando per ognuno di essi se si tratta di un massimo relativo, di un minimo relativo, di una sella oppure nessuno dei precedenti. (N.B. non ce ne sono più di quattro!) (5 p.)

- $P_1 = (0,0)$ MINIMO
- $P_2 = \left(\sqrt{\ln(2)}, 2\sqrt{\ln(2)}\right)$ SELLA
- $P_3 = -\left(\sqrt{\ln(2)}, 2\sqrt{\ln(2)}\right)$ SELLA

4. Si scriva la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 16y = x$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. (3p.)

$$y(x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x} - 8x}{128}$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

(a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (2p.).

(b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (4 p.).

(c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (4p.).

(d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (3p.).

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 22 maggio 2006 - D -

Cognome ______________________ Nome ______________________ matr. ________

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1. Per ognuno dei seguenti casi si indichi se la serie indicata converge assolutamente (barrare la casella $\boxed{\text{AC}}$), converge ma non converge assolutamente (barrare $\boxed{\text{C}}$) oppure non converge (barrare $\boxed{\text{NC}}$) (6p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1+2^{-n}+3n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{N}\cancel{\text{C}}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \cos(1/n) - 2^{1/n^2} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}};$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+n!} \quad \boxed{\text{A}\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{C}}\ \boxed{\text{NC}}; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3+n^2} \quad \boxed{\text{AC}}\ \boxed{\cancel{\text{C}}}\ \boxed{\text{NC}}.$$

2. Si calcoli il seguente integrale improprio; se si ritiene che non esista si barri la casella $\boxed{\text{N.E.}}$ (non esiste) (p.6)

$$\int_0^{+\infty} \frac{3x+2}{(x^2+1)(x+1)}\, dx = \frac{5}{4}\pi \ \boxed{\text{N.E.}}$$

3. Si consideri la funzione di due variabili $f(x,y) := x^2 + 4y^2 - e^{xy}$. Si trovino tutti i punti stazionari indicando per ognuno di essi se si tratta di un massimo relativo, di un minimo relativo, di una sella oppure nessuno dei precedenti. (N.B. non ce ne sono più di quattro!) (5 p.)

   - $P_1 = (0,0)$ MINIMO
   - $P_2 = \left(2\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}\right)$ SELLA
   - $P_3 = -\left(2\sqrt{\ln(2)}, \sqrt{\ln(2)}\right)$ SELLA

4. Si scriva la soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 9y = x$ con le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$. (3p.)

$$y(x) = \frac{e^{3x} - e^{-3x} - 6x}{54}$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y' = \frac{2}{x}y + 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0$$

   (a) Per ogni y_0 in $\mathbf{R}$ si trovi la soluzione y tale che $y(1) = y_0$ (2p.).

   (b) Al variare di y_0 si calcolino i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ (4 p.).

   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni $y(x)$ corrispondenti ai valori di y_0 che si ritengono più significativi (4p.).

   (d) Si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due soluzioni (distinte) (3p.).

Risoluzione della seconda parte

Applicando la formula risolutiva:

$$\begin{aligned} y(x) =& x^2\left(y_0+\int_1^x\left(1-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt\right)=x^2\left(y_0+\int_1^x\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)\,dt\right)= \\ & x^2\left(y_0+\left[-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right]_1^x\right)=x^2\left(y_0-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\right)=Cx^2-x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

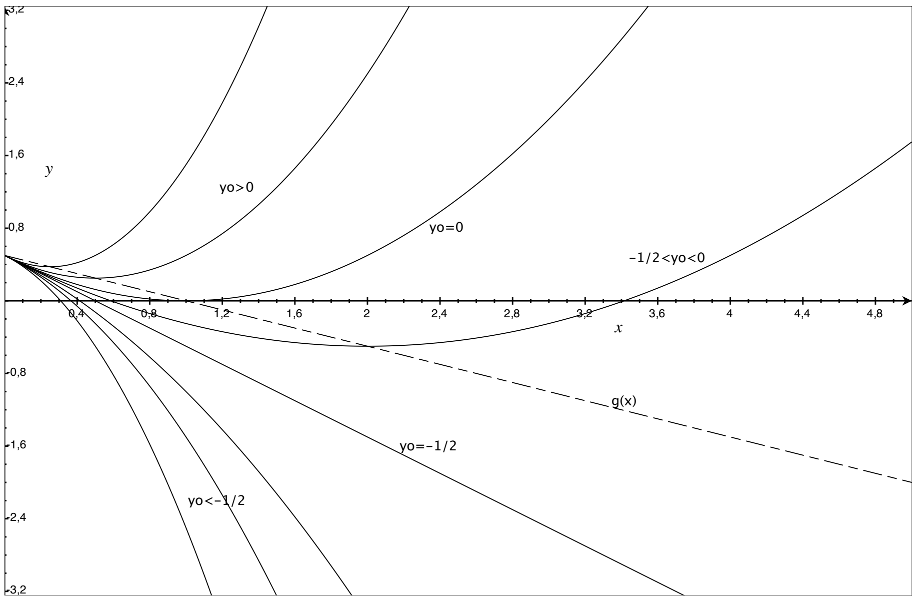
dove $C=y_0+\frac{1}{2}$. Se ne deduce facilmente che

$$\lim_{x\to 0^+} y(x)=0^-, \qquad \lim_{x\to+\infty} y(x)=\begin{cases} +\infty & \text{se } y_0>-\frac{1}{2} \\ -\infty & \text{se } y_0\le-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Posto $F(x,y):=\dfrac{2y}{x}+1-\dfrac{1}{x}$, di modo che l'equazione diventa $y'=F(x,y)$, si vede subito che, sulle $x>0$

$$F(x,y)\ge 0 \Leftrightarrow y\ge\frac{1-x}{2}$$

Sfruttando il fatto che $y(x)$ cresce/decresce se $y(x)\ge g(x)/y(x)\le g(x)$ si perviene alla sitazione rappresentata nella figura.



Esaminando i grafici si può dedurre che $y(x)$ attraversa due volte lo zero (a destra di zero, dove $y(x)$ è stata definita) se e solo se $-1/2<y_0<0$. Allo stesso risultato si può arrivare imponendo che il discriminante di $y(x)$ (che in effetti è un polinomio di secondo grado) sia positivo e che entrambre le radici siano positive.