Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 1 giugno 2005 - A - Soluzioni

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+4} \quad \boxed{\text{conv. ass.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{n^2+7} \quad \boxed{\text{conv.ass.}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+7} \quad \boxed{\text{non conv.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2n^2}{n^4+4} \quad \boxed{\text{conv. ass.}}$$

2.

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)e^{5\sin(x)}\,dx = \frac{e^5}{5} - \frac{e^5-1}{25}$$

3. Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{5}{y^3}$ si ha:

$$y(1) = 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt[4]{1+20(x-1)}, \quad y(-1) = -1 \quad \Rightarrow y(x) = -\sqrt[4]{1+20(x+1)}$$

4. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := xy - x$. Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$ da cui l'unico punto stazionario è $(0,1)$. Calcolando l'hessiano in questo punto si vede che $\boxed{\text{non è né di massimo né di minimo locale}}$. Se $D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$; si vede che

$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad \min_D f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ (3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente (2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 1/2$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

2. Si calcoli l'integrale improprio (se esiste) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+8}\,dx$ (6p.)

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 1 giugno 2005 - B - Soluzioni

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+5} \quad \boxed{\text{conv. ass.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{n^2+9} \quad \boxed{\text{conv.ass.}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+9} \quad \boxed{\text{non conv.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2n^2}{n^4+5} \quad \boxed{\text{conv. ass.}}$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)e^{2\sin(x)}\,dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4}$$

3. Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{2}{y^3}$ si ha:
$$y(1) = 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt[4]{1+8(x-1)}, \quad y(-1) = -1 \quad \Rightarrow y(x) = -\sqrt[4]{1+8(x+1)}$$

4. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := -xy - x$. Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y-1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x$ da cui l'unico punto stazionario è $(0,-1)$. Calcolando l'hessiano in questo punto si vede che $\boxed{\text{non è né di massimo né di minimo locale}}$.
Se $D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$; si vede che
$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad \min_D f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}, \qquad x > 0$$
   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ (3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente (2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 1/2$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

2. Si calcoli l'integrale improprio (se esiste) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+4}\,dx$ (6p.)

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 1 giugno 2005 - C - Soluzioni

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+6} \quad \boxed{\text{conv. ass.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{n^2+5} \quad \boxed{\text{conv.ass.}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+5} \quad \boxed{\text{non conv.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2n^2}{n^4+6} \quad \boxed{\text{conv. ass.}}$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)e^{3\sin(x)}\,dx = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9}$$

3. Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{3}{y^3}$ si ha:
$$y(1) = 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt[4]{1+12(x-1)}, \quad y(-1) = -1 \quad \Rightarrow y(x) = -\sqrt[4]{1+12(x+1)}$$

4. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := xy - y$. Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-1$ da cui l'unico punto stazionario è $(1,0)$. Calcolando l'hessiano in questo punto si vede che $\boxed{\text{non è né di massimo né di minimo locale}}$. Se $D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$; si vede che
$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad \min_D f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale
$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}, \qquad x > 0$$
   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ (3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente (2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 1/2$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

2. Si calcoli l'integrale improprio (se esiste) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+27}\,dx$ (6p.)

Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 1 giugno 2005 - D - Soluzioni

PRIMA PARTE (contano solo le risposte da scrivere negli appositi spazi)

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+7} \quad \boxed{\text{conv. ass.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2}{n^2+3} \quad \boxed{\text{conv.ass.}}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+n}{n^2+3} \quad \boxed{\text{non conv.}} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n+2n^2}{n^4+7} \quad \boxed{\text{conv. ass.}}$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)e^{4\sin(x)}\,dx = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4-1}{16}$$

3. Data l'equazione differenziale $y' = \dfrac{4}{y^3}$ si ha:

$$y(1) = 1 \Rightarrow y(x) = \sqrt[4]{1+16(x-1)}, \quad y(-1) = -1 \quad \Rightarrow y(x) = -\sqrt[4]{1+16(x+1)}$$

4. Si consideri la seguente funzione di due variabili: $f(x,y) := -xy - y$. Si ha $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x-1$ da cui l'unico punto stazionario è $(-1,0)$. Calcolando l'hessiano in questo punto si vede che $\boxed{\text{non è né di massimo né di minimo locale}}$.
Se $D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$; si vede che

$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad \min_D f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

SECONDA PARTE (da svolgere sinteticamente nella parte libera del foglio)

1. Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}, \qquad x > 0$$

   (a) dato y_0 in $\mathbf{R}$ si scriva la soluzione y su $]0,+\infty[$ con $y(1) = y_0$ (1p.);
   (b) si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$ (3p.);
   (c) si traccino i grafici delle soluzioni per i valori più significativi di y_0 (3p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione y è decrescente (2p.);
   (e) si dica per quali y_0 l'equazione $y(x) = 1/2$ ha due soluzioni $x > 0$ (3p.).

2. Si calcoli l'integrale improprio (se esiste) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+9}\,dx$ (6p.)

1. La prima serie, la seconda e la quarta sono tutte assolutamente convergenti in quanto, passando alle corrispondenti serie dei valori assoluti si trovano delle serie asintotiche a $\sum \frac{1}{n^2}$. La terza serie non converge. Per vederlo conviene scrivere (il caso è quello della fila D - gli altri sono analoghi)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{n^2+7} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+7} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+7}$$

A questo punto si vede che la prima serie converge per Leibniz, mentre la seconda diverge in quanto asintotica a $\sum \frac{1}{n}$.

2. Utilizzando la sostituzione $\sin(x) = t$ e integrando per parti si ha (quello che segue ìl caso C)

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x) e^{4\sin(x)}\, dx = \int_0^1 t e^{3t}\, dt = \left[\frac{te^{3t}}{3}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}\, dt = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3-1}{9}$$

3. Si tratta di un'equazione a variabili separabili che si integra mediante la nota formula. Si ottiene

$$\frac{y(x)^4 - y(x_0)^4}{4} = x - x_0$$

Inserendo i valori iniziali richiesti e invertendo nel modo appropriato (coerente con i segni dei valori iniziali) si ottengono le formule indicate prima.

4. Consideriamo il caso $f(x,y) = xy - x$. È semplice vedere che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

e dunque l'unico punto stazionario è $(0,1)$. Calcoliamo l'hessiano:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

e quindi

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(costante rispetto a } (x,y)\text{)}$$

Il polinomio caratteristico associato ad H_f è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$ che ha come radici ± 1. Dunque il punto stazionario trovato è di sella. Per trovare il massimo e il minimo su D dobbiamo controllare i punti stazionari interni (e non ce ne sono) e i punti stazionari sulla frontiera, cioè i punti (x,y) tali che $x^2 + y^2 = 1$ ed esiste λ in $\mathbf{R}$ per cui

$$\begin{cases} y - 1 & = & \lambda x \\ x & = & \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x & +y & = & 1 \\ x & -\lambda y & = & 0 \end{cases}$$

Moltiplicando per λ la seconda riga e sommando si ottiene $y = 1/(1-\lambda^2)$ e $x = \lambda/(1-\lambda^2)$. Imponendo la condizione di appartenenza al bordo: $1 = x^2 + y^2 = (\lambda^2+1)/(1-\lambda^2)^2$ si ottiene $\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0$ da cui $\lambda = 0$ oppure $\lambda = \pm\sqrt{3}$. La prima condizione dà il punto stazionario libero già trovato (ed escluso). Dalla seconda si ottengono altri due punti $(\pm\sqrt{3}/2, -1/2)$, che inseriti nella funzione danno

$$\max_D f = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad \min_D f = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

1. Si tratta di un'equazione lineare. (a) Applicando la formula si ottiene facilmente che:

$$y(x) = x^2 \left\{ y_0 - \int_1^x \frac{1}{t^5}\,dt \right\} = x^2 \left\{ y_0 + \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{4} \right\} = \left(y_0 - \frac{1}{4} \right) x^2 + \frac{1}{4x^2}$$

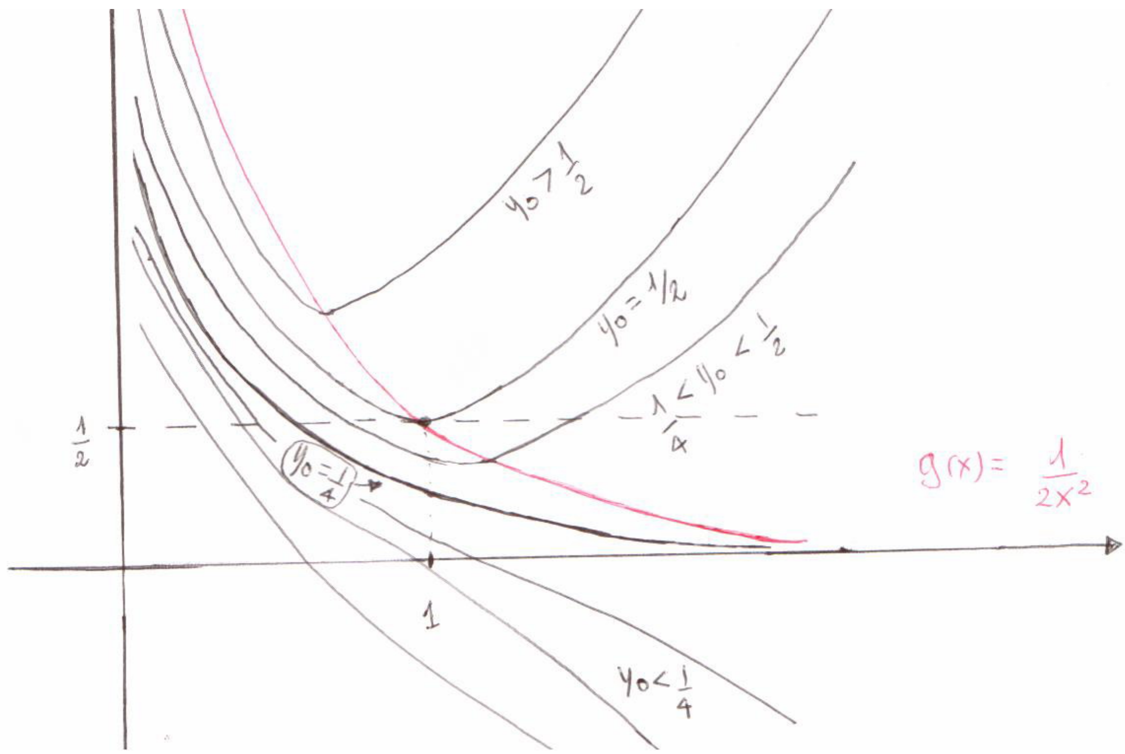
(b) Dalla formula si ricava che

$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se } y_0 = \frac{1}{4} \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{1}{4} \end{cases}$$

(c) Per tracciare i grafici delle soluzioni conviene porre $F(x,y) := \frac{2}{x}y - \frac{1}{x^3}$. Si ha (N.B. siamo su $\{x > 0\}$)

$$F(x,y) > 0 \ (< 0 / = 0) \Leftrightarrow y > \frac{1}{2x^2} \ (y < \frac{1}{2x^2} \ / \ y = \frac{1}{2x^2})$$

quindi tracciando il grafico di $g(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ si trovano i grafici indicati in figura.



(d) Guardando i grafici si capisce facilmente che y è decrescente se e solo se $\boxed{y_0 \leq 4}$
(e) Sempre guardando i grafici si capisce che la souluzione y incrocia due volte la retta $y = 1/2$ se e solo se $1/4 < y_0 < 1/2$. Per questo è importante il fatto che $g(1) = 1/2$.

2. L'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^3+a}\,dx$ NON CONVERGE. Infatti il denominatore si fattorizza $x^3 + a = (x + \sqrt[3]{a})(x^2 - \sqrt[3]{a}x + \sqrt[3]{a^2}$ e quindi si annulla in $-\sqrt[3]{a}$ (e solo lì). Qundi perché l'integrale converga devono essere finiti quattro pezzi:

$$\int_{-\infty}^{-b} \frac{x}{x^3+a}\,dx, \quad \int_{-b}^{-\sqrt[3]{a}} \frac{x}{x^3+a}\,dx, \quad \int_{-\sqrt[3]{a}}^{0} \frac{x}{x^3+a}\,dx, \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{x}{x^3+a}\,dx$$

per un qualunque $b > \sqrt[3]{a}$. Il primo e l'ultimo integrale sono convegenti, perché l'integrando è asintotico a $1/x^2$ (a $\pm\infty$). Purtroppo il secondo e il terzo sono divergenti perchè l'integrando è asintotico a $1/(x + \sqrt[3]{a})$ (vicino a $-\sqrt[3]{a}$) che ha integrale divergente.
Quanto detto sopra si ricava anche facendo i calcoli. Per togliere di mezzo a conviene usare la sostituzione $y = x/\sqrt[3]{a}$, che conduce a

$$\int \frac{x}{x^3+a}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{x}{(x/\sqrt[3]{a})^3+1}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\sqrt[3]{a}y}{y^3+1}\sqrt[3]{a}\,dy = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\int \frac{y}{y^3+1}\,dy$$

A questo punto usiamo la formula con $a = 1$, $y^3+1 = (y+1)(y^2-y+1)$ e riduciamo l'integrando in fratti semplici. Con semplici calcoli si trova

$$\int \frac{y}{y^3+1}\,dy = \frac{1}{3}\int \left(\frac{y+1}{y^2-y+1} - \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\sqrt{y^2-y+1}}{|y+1|}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2-y+1}\,dy$$

Già a questo punto si nota che il primo dei due termini è divergente in -1 (mentre è convegente all'infinito). Per quanto riguarda l'ultimo integrale

$$\int \frac{1}{y^2-y+1}\,dy = \int \frac{1}{(y-1/2)^2+3/4}\,dy = \frac{4}{3}\int \frac{1}{((2/\sqrt{3})y-1)^2+1}\,dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{argtang}((2/\sqrt{3})y)$$

(che quindi darebbe un contributo finito).