Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 31 marzo 2007 - SOLUZIONI -

1.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{-n}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n-2^n}{n!}$ NON CONVERGE

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^4+n^2}$ NON CONVERGE

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3+n}{n^4+1}$ CONVERGE, MA NON CONVERGE ASSOLUTAMENTE

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n^2}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{1+n^6}$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

1) Se $a_n := (-1)^n n e^{-n}$ allora $|a_n| = ne^{-n}$. Applichiamo il criterio della radice ad $|a_n|$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}e^{-1} \to e^{-1} < 1$. Dunque la serie degli $|a_n|$ converge.
2) Se $a_n := \frac{n^n-2^n}{n!}$ allora si vede che $a_n \to +\infty$ e quindi la serie diverge.
3) Se $a_n := \frac{n^3+1}{n^4+n^2}$ allora $a_n \geq 0$ e $na_n = \frac{n^4+n}{n^4+n^2} \to 1$. Quindi a_n è asintotica a $b_n := \frac{1}{n}$. Dato che la serie dei b_n diverge anche la serie degli a_n diverge.
4) Se $a_n := \frac{(-1)^n n^3+n}{n^4+1}$ conviene scrivere $a_n = b_n + c_n$ dove $b_n := \frac{(-1)^n n^3}{n^4+1}$ e $c_n := \frac{n}{n^4+1}$. Per quanto riguarda c_n è facile vedere che è a termini positivi ed è asintotica a $\frac{1}{n^3}$, dunque la sua serie è assolutamente convergente. Per quanto riguarda b_n si vede che è a segni alterni e che $|b_n| = \frac{n^3}{n^4+1}$ è decrescente e quindi la serie dei b_n converge per il criterio di Leibniz. Viceversa $|b_n|$ è asintotica a $\frac{1}{n}$ e quindi la serie dei $|b_n|$ è divergente. In definitiva la serie dei b_n converge ma non converge assolutamente - aggiungendo c_n lo stesso si verifica per la serie di partenza.
5) Se $a_n := \frac{\arctan(n)}{n^2}$ si ha $0 \leq a_n \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n^2} =: b_n$. Dato che la serie dei b_n converge anche la serie degli a_n converge.
6) Se $a_n := \frac{(-1)^n n^4}{1+n^6}$ si ha $|a_n| = \frac{n^4}{1+n^6}$ e allora si vede facilmente che $|a_n|$ è asintotica a $\frac{1}{n^2}$ Dato che la serie di $\frac{1}{n^2}$ converge, lo stesso vale per $|a_n|$ (criterio del confronto) e quindi la serie di partenza è assolutamente convergente.

2.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^a \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = a\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\,dx + \int_0^a x\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$\big[a^2\arcsin(x/a)\big]_{x=0}^{x=a} + \Big[x\sqrt{a^2-x^2}\Big]_{x=0}^{x=a} - \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\frac{\pi}{2} - \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = a^2\frac{\pi}{2} \qquad \text{(ragionando come sopra).}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{2}\frac{2x}{(4+x^2)^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\frac{-1}{1+x^2}\right]_{x=0}^{x\to\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)}\,dx =$$

$$0 + \frac{1}{8}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+(x/2)^2)}\,dx = \left[\frac{1}{4}\arctan(x/2)\right]_{x=0}^{x\to\infty} = \frac{1}{8}\pi.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi \qquad \text{(ragionando come sopra).}$$

Si noti che il primo integrale rappresenta l'area di un quarto del cerchio di centro 0 e raggio a !

3. Consideriamo la funzione $f(x,y) := xye^{x^2+y^2}$ su $B := \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ Con semplici calcoli

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = (y+2x^2y)e^{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = (x+2xy^2)e^{x^2+y^2}.$$

L'unico punto di $\mathbf{R}^2$ che annulla entrambe le derivate è $(0,0)$. Però f cambia segno nell'intorno di $(0,0)$ che dunque è un punto di sella (lo si può vedere anche guardando l'Hessiano di f in $(0,0)$). Ne segue che i punti di massimo e minimo (che esistono perché B è limitato e chiuso) si trovano su $\partial B = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si trova il sistema

$$\begin{cases} (y+2x^2y)e^{x^2+y^2} & = \lambda x \\ (x+2xy^2)e^{x^2+y^2} & = \lambda y \\ x^2+y^2 & = 1 \end{cases}$$

Moltiplicando la prima riga per y, la seconda per x e prendendo la differenza si ottiene

$$((y^2+2x^2y^2) - (x^2+2x^2y^2))e^{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-y^2 = 0 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

Usando la terza riga si trovano quattro punti $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e calcolando f su tali punti si vede facilmente che

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{e}{2}, \qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{e}{2}$$

per cui il massimo di f su B vale $e/2$ mentre il minimo vale $-e/2$. Se ne deduce che:

$$\min_{(x,y)\in B} 1-3xye^{x^2+y^2} = 1-\frac{3e}{2}, \qquad \max_{(x,y)\in B} 1-3xye^{x^2+y^2} = 1+\frac{3e}{2},$$
$$\min_{(x,y)\in B} 1+2xye^{x^2+y^2} = 1-e, \qquad \max_{(x,y)\in B} 1+2xye^{x^2+y^2} = 1+e,$$
$$\min_{(x,y)\in B} 1-2xye^{x^2+y^2} = 1-e, \qquad \max_{(x,y)\in B} 1-2xye^{x^2+y^2} = 1+e,$$
$$\min_{(x,y)\in B} 1+3xye^{x^2+y^2} = 1-\frac{3e}{2}, \qquad \max_{(x,y)\in B} 1+3xye^{x^2+y^2} = 1+\frac{3e}{2}.$$

4. Si scriva la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''+2y'+y=x^2. \\ y(0)=0, y'(0)=0, \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico per l'equazione è $p(z)=z^2+2z+1=(z+1)^2$ che quindi ha solo la radice doppia $z=-1$. Ne segue che le soluzioni dell'equazione omogenea sono date da

$$y_0(x)=\gamma e^{-x}+\delta xe^{-x} \qquad \gamma,\delta\in\mathbf{R}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $\bar{y}(x)=ax^2+bx+c$; si trova

$$\bar{y}'(x)=2ax+b,\ \bar{y}''(x)=2a \qquad \Rightarrow \bar{y}''+2\bar{y}'+\bar{y}=2a+4ax+2b+ax^2+bx+c$$

da cui $a=1$, $4a+b=0$, $2a+2b+c=0$ che implica $\bar{y}(x)=x^2-4x+6$. Se in luogo di x^2 il termine noto dell'equazione è $-x^2/2x^2/-2x^2$ la soluzione particolare risulta essere $\bar{y}(x)=-x^2+4x-6/\bar{y}(x)=2x^2-8x+12/\bar{y}(x)=-2x^2+8x-12$. Dunque la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x)=\gamma e^{-x}+\delta xe^{-x}+x^2-4x+6 \qquad \gamma,\delta\in\mathbf{R}.$$

Da tale formula risulta $y(0)=\gamma+6$, $y'(x)=-\gamma e^{-x}+\delta e^{-x}-\delta xe^{-x}+2x-4$ e quindi $y'(0)=-\gamma+\delta-4$. Imponendo le condizioni iniziali nulle si trova $\gamma=-6$ e $\delta=2$. Dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x)=-6e^{-x}+2xe^{-x}+x^2-4x+6.$$

Negli altri casi (con $-x^2/2x^2/-2x^2$) si trova

$$y(x)=6e^{-x}-2xe^{-x}-x^2+4x-6.$$
$$y(x)=-12e^{-x}+4xe^{-x}+2x^2-8x+12.$$
$$y(x)=12e^{-x}-4xe^{-x}-2x^2+8x-12.$$

5. Si consideri l'equazione differenziale:

$$y'=\frac{3y}{x}+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} \qquad x>0.$$

Dalla formula risolutiva:

$$
\begin{aligned}
y(x) = x^3 \left(y(1) + \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{t} \right) \frac{1}{t^3}\, dt \right) = x^3 \left(y(1) + \int_1^x \left(t^{-4} - 2t^{-5} \right)\, dt \right) = \\
x^3 \left(y(1) + \left[\frac{1}{-3} t^{-3} - \frac{2}{-4} t^{-4} \right]_{t=1}^{t=x} \right) = x^3 \left(y(1) - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{6} \right) = \\
\left(y_0 - \frac{1}{6} \right) x^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2x}.
\end{aligned}
$$

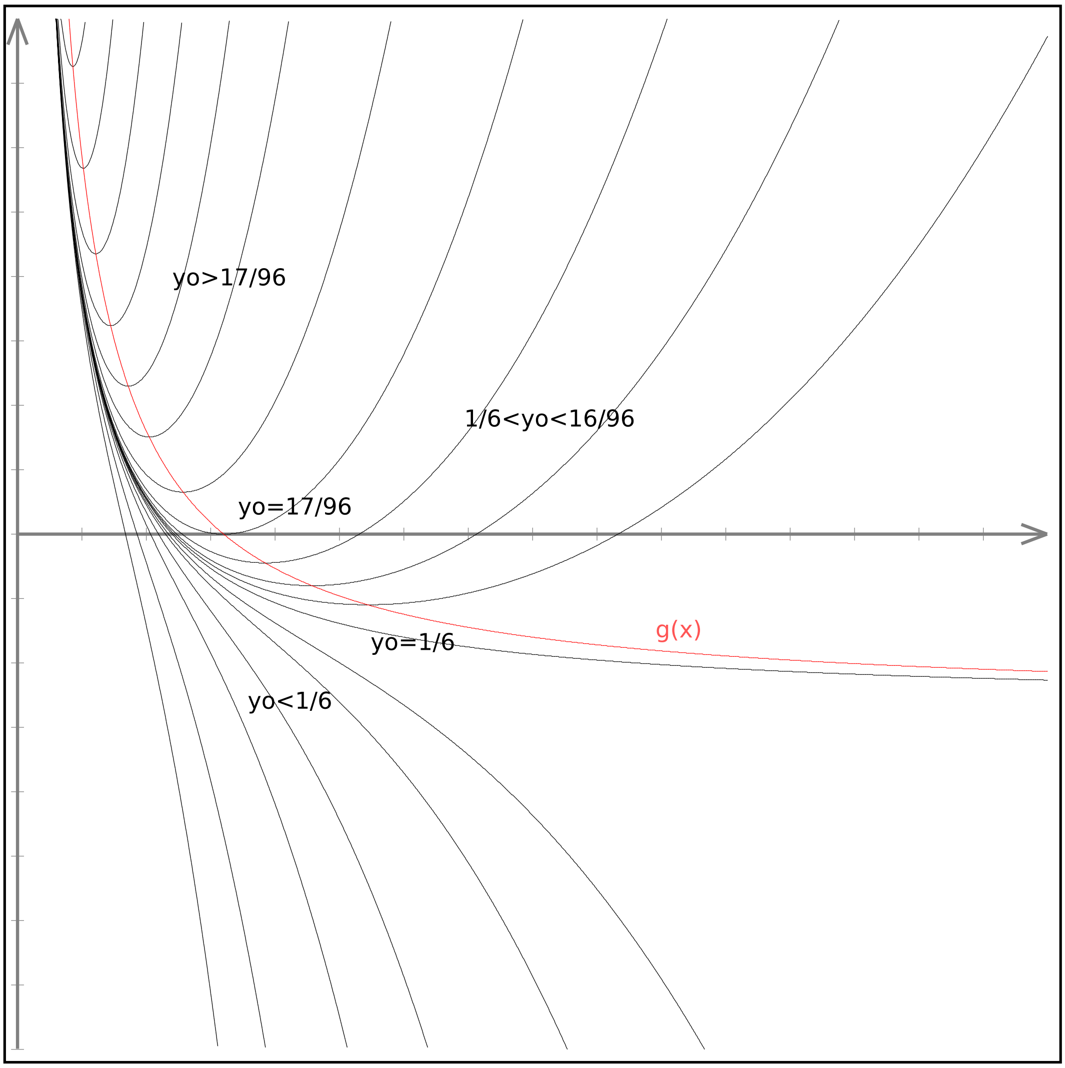
Ne segue:

$$
\lim_{x \to 0^+} y(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \text{se } y_0 = \frac{1}{6} \\ -\infty & \text{se } y_0 < \frac{1}{6} \end{cases}
$$

Per studiare la monotonia poniamo $F(x, y) := \frac{3y}{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$, di modo che l'equazione differenziale si scrive come $y' = F(x, y)$. Allora

$$
F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) =: g(x)
$$

mentre $F(x, y) > 0 \Leftrightarrow y > g(x)$ e $F(x, y) < 0 \Leftrightarrow y < g(x)$. Dunque il grafico della g divide la regione del piano in cui le y crescono ($F > 0$) da quella in cui le y decrescono ($F < 0$). Tracciando il grafico di g e tenendo conto di tutte le informazioni raccolte fno ad ora si perviene ai grafici indicati in figura.



Per rispondere all'ultimo quesito notiamo che $g(x) = 0$ se e solo se $x = 2$. Tracciamo la soluzione $\bar{y}$ tale che $\bar{y}(2) = 0$, cioè quella per cui

$$0 = \left(y_0 - \frac{1}{6}\right) 2^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{8 \cdot 12} \Leftrightarrow y_0 = \frac{17}{96}.$$

È chiaro che le soluzioni che partono con $y_0 > \frac{17}{96}$ saranno sempre sopra la $\bar{y}$ e dunque non intersecheranno mai l'asse x. Invece quelle con $y_0 < \frac{17}{96}$ intersecano due volte l'asse x, *fino a quando* vanno a più infinito per $x \to +\infty$ (poi intersecano una volta sola). Dunque i valori di y_0 per cui ci sono due intersezioni sono dati da $\frac{1}{6} y_0 < \frac{17}{96}$.