Matematica - Ing. Gestionale - Compitino del 28 gennaio 2005 SOLUZIONI

1. Si dica quanto vale ognuno dei seguenti limiti, oppure si barri la casella $\boxed{\text{NE}}$ per dire che il limite non esiste. Gli esercizi (a)–(f) valgono 1,5 punti, (g) ed (h) ne valgono 3.

$(a)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{An^2 - Bn^4 + Cn^3}{Dn^2 + En^4 - Fn^3} = -\frac{B}{E}$

$(b)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3\sin(n) - An}{\sin(1/n)} = -\infty \ (A > 0)$

$(c)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\frac{\sin(A/n)}{B + n^2} = 0$

$(d)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2 - An + 1} - n = -\frac{A}{2}$

$(e)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n - n^k}{B^n n^h - C^n} = 0 \ (0 < A < C, 0 < B < C)$

$(f)$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n! + n^n}{n! + 5^n} = +\infty$

$(g)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(\sqrt{x}) - e^x}{\sin(Ax)} = -\frac{3}{2A}$

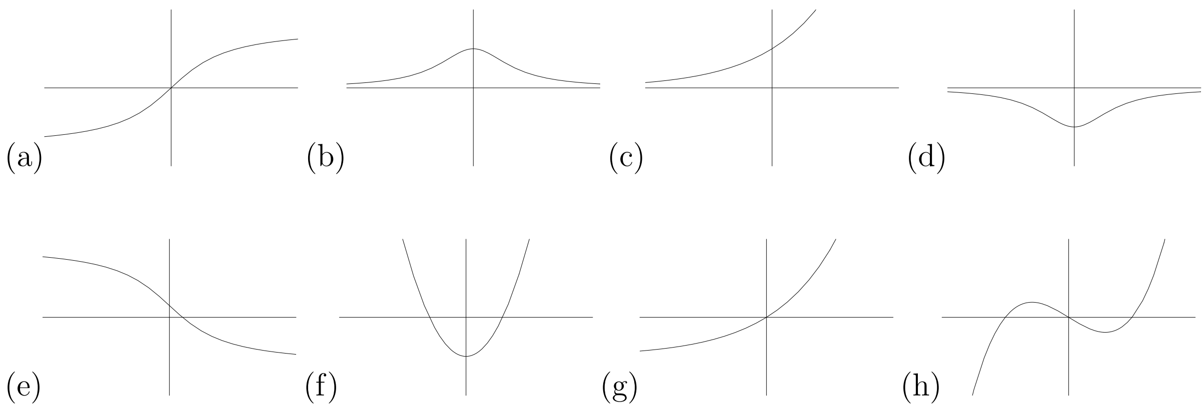
$(h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x + A}{x}\right)^x = 1$

2. Consideriamo le seguenti funzioni, per $x \to 0$:

$$(a)\ x^3, \quad (b)\ \sqrt{Ax^2 + Bx^6}, \quad (c)\ \sqrt{1 + Cx^2} - 1, \quad (d)\ \cos(Dx^2) - 1.$$

Quale tende a zero più velocemente? R: $\cos(Dx^2) - 1(= -\frac{D^2x^4}{2} + o(x^4))$ (1,5p.), quale più lentamente?R: $\sqrt{4x^2 + x^6}(= \sqrt{A}|x| + o(x))$( 1,5p).

3. Tra le otto funzioni il cui grafico é rappresentato qui di seguito, quattro sono la derivata di una delle altre.




Si individuino le coppie funzione-derivata (1 p. ciascuna).

$$(a) - (b) \qquad (g) - (c) \qquad (e) - (d) \qquad (h) - (f)$$

(per la fila B - per le altre le funzioni sono le stesse, solo la lettera identificativa cambia)

4. Si trovi il polinomio di Taylor di ordine 3 per la funzione $f(x) = \ln(A+e^x)$, rispetto al punto $x_0 = 0$ (3 p.).

$$P_3(x) = \ln(A+1) + \frac{1}{A+1}x + \frac{A}{2(A+1)^2}x^2 + \frac{A(A-1)}{6(A+1)^3}x^3$$

5. Si calcoli il seguente limite (6 p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+Ax^2} - \cos(2x) + x}{\sin(x^2)}$$

SVOLGIMENTO
Si ha:

$$\sqrt{1-2x+Ax^2} = 1 + \frac{1}{2}(-2x+Ax^2) - \frac{1}{8}(-2x+Ax^2)^2 + o((-2x+Ax^2)^2) =$$
$$1 - x + \frac{1}{2}Ax^2 - \frac{1}{8}(4x^2 + o(x^2)) + o(4x^2 + o(x^2)) = 1 - x + \frac{A-1}{2}x^2 + o(x^2);$$
$$\cos(2x) = 1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2) = 1 - 2x^2 + o(x^2);$$
$$\sin(x^) = x^2 + o(x^2).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x+Ax^2} - \cos(2x) + x}{\sin(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{A-1}{2}x^2 + 2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{A+3}{2}$$

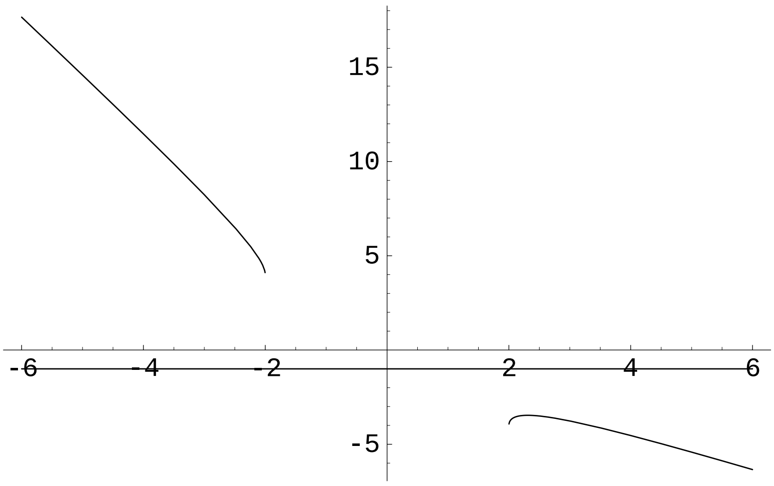
6. Si tracci il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2-4} - 2x$. Si trovi inoltre quante (non quali) soluzioni ha l'equazione $f(x) + 1 = 0$ (6 p.).
SVOLGIMENTO
DOMINIO: $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$;
LIMITI (e valori) ALLA FRONTIERA:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1-4/x^2} - 2\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{1-4/x^2} - 2\right) = -\infty$$
$$f(-2) = 4, \qquad f(2) = -4$$

MONOTONIA (il segno lo facciamo alla fine): calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - 2.$$

Allora $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{x^2-4}$. Questa condizione equivale a $x > 0$ e $x^2 > 4x^2 - 16 \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x^2 \leq 16/3$ che in definitiva diventa $x \in [2, 4\sqrt{3}/3[$ (si noti che $2 < 4\sqrt{3}/3 \Leftrightarrow 4 < 16/3 \Leftrightarrow 12 < 16$). Nello stesso modo si vede che in $]-\infty, -2] \cup ]4\sqrt{3}/3, +\infty[$ $f'(x) < 0$, mentre $x = 4\sqrt{3}/3$ è l'unico punto stazionario. Per la struttura dei segni di $f'$ tale punto è di massimo relativo. Il valore corrispondente è $f(4\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/3 - 8\sqrt{3}/3 = -6\sqrt{3}/3 < 0$, da cui si deduce che $f$ rimane sempre negativa per $x \geq 2$ e si ricava il grafico seguente.




Si vede anche che la retta $y = -1$ si trova sopra il grafico di $f$ per $x \geq 2$, dato che il valore massimo $-6\sqrt{3}/3$ è minore di $-1$ ($-6\sqrt{3}/3 < -1 \Leftrightarrow 6\sqrt{3}/3 > \Leftrightarrow 6 \geq \sqrt{3} \Leftrightarrow 36 > 3$). e dunque NON ci sono soluzioni per l'equazione $f(x) + 1 = 0$.