Matematica - Ingegneria Gestionale - Prova scritta del 25 marzo 2004 Soluzioni

- - Se $f_1(x) = A^x = e^{\ln(A)x}$ allora $f_1'(x) = \ln(A)e^{\ln(A)x} = \ln(A)A^x$, dunque $f_1'(0) = \ln(A)$.
  - Se $f_2(x) = \ln\left(\frac{A}{x+B}\right) = \ln(A) - \ln(x+B)$, allora $f_2'(x) = -\frac{1}{x+B}$, dunque $f_2'(0) = -\frac{1}{B}$.
  - Se $f_3(x) = A^{\sqrt{1+x}} = f_1(\sqrt{1+x})$, allora $f_3'(x) = f_1'(\sqrt{1+x})\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, dunque $f_3'(0) = f_1'(1)\frac{1}{2} = \frac{\ln(A)A}{2}$.
  - Se $f_4(x) = \frac{x-A}{x+B}$, allora $f_4'(x) = \frac{1(x+B)-1(x-A)}{(x+B)^2} = \frac{A+B}{(x+B)^2}$, dunque $f_4'(0) = \frac{A+B}{B^2}$.
  - Se $f_5(x) = \frac{\sin(x)-0}{\sin(x)+0} = f_4(\sin(x))$, allora $f_5'(x) = f_4'(\sin(x))\cos(x)$, dunque $f_5'(0) = f_4'(0)1 = \frac{A+B}{B^2}$.
  - Se $f_6(x) = \cos(x)^{\sin(x)} = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}$, allora $f_6'(x) = e^{\sin(x)\ln(\cos(x))}\,(\sin(x)\ln(\cos(x))' = \cos(x)^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) + \sin(x)\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\right)$, da cui $f_6'(0) = 1(0-0) = 0$.

- Se $f(x) := Ax+B$ e $g(x) := x+Be^x$ si ha $f(0) = B$, $f'(x) = A$ e dunque $f'(0) = A$; inoltre $g(0) = B \Leftrightarrow g^{-1}(B) = 0$, $g'(x) = 1 + Be^x$ e dunque $g'(0) = 1 + B$. Da tutto questo si deduce:

$$(g^{-1}\circ f)'(0) = (g^{-1})'(f(0))f'(0) = (g^{-1})'(B)A = \frac{A}{g'(0)} = \frac{A}{1+B}$$

- La funzione $f(x) := (\sin(\sqrt{x}))^\alpha$ è identicamente eguale a 1 se $\alpha = 0$ e dunque in questo caso è derivabile. Consideriamo $\alpha > 0$. Allora $f(0) = 0$ e quindi il rapporto incrementale in 0 è

$$\frac{\sin^\alpha(\sqrt{x})}{x} = \left(\frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^\alpha \frac{1}{x^{1-\alpha/2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2 \\ 1 & \text{se } \alpha = 2 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2 \end{cases}$$

(stiamo facendo il limite in zero da destra, visto che f è definita per $x \geq 0$).
Quindi f è derivabile in zero, se $\alpha = 0$ oppure $\alpha \geq 2$.

- Data la funzione $f(x) := \sqrt{1+\ln(1+Ax)}$ si ha:

$$f(x) = \sqrt{1 + Ax - \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^3}{3}x^3 + o(x^3)} = 1 + \frac{1}{2}\left(Ax - \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^3}{3}x^3 + o(x^3)\right) +$$
$$-\frac{1}{8}\left(Ax - \frac{A^2}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{16}\left(Ax + o(x)\right)^3 + o(O(x)^3)\ (*) =$$
$$1 + \frac{1}{2}\left(Ax - \frac{A^2}{2}x^2 + \frac{A^3}{3}x^3 + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(A^2x^2 - A^3x^3 + o(x^3)\right) +$$
$$\frac{1}{16}\left(A^3x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) = 1 + \frac{A}{2}x - \frac{3A^2}{8}x^2 + \frac{17A^3}{48}x^3 + o(x)^3$$

e quindi

$$P_3(x) = 1 + \frac{A}{2}x - \frac{3A^2}{8}x^2 + \frac{17A^3}{48}x^3$$

(*) Si è usato $\sqrt{1+y} = 1 + y/2 - y^2/8 + y^3/16 + o(y^3)$. Allo stesso risultato si arriva calcolando le derivate prima, seconda e terza di f in zero e applicando la formula.

- Si ha:

$$x(\sin(Ax) - Ax) = x(Ax - \frac{A^3x^3}{6} + o(x^3) - Ax) = -\frac{A^3x^4}{6} + o(x^4)$$

inoltre

$$\sqrt{\cos(4x)}e^{4x^2} = \sqrt{1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)}(1 + 4x^2 + 8x^4 + o(x^4)) =$$
$$\left[1 + \frac{1}{2}\left(-8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)\right) - \frac{1}{8}\left(-8x^2 + o(x^3)\right)^2 + o(O(x^2)^2)\right](1 + 4x^2 + 8x^4 + o(x^4)) =$$
$$\left[1 - 4x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^4) - 8x^4 + o(x^4) + o(O(x^2)^2)\right](1 + 4x^2 + 8x^4 + o(x^4)) =$$
$$\left[1 - 4x^2 - \frac{8}{3}x^4 + o(x^4)\right](1 + 4x^2 + 8x^4 + o(x^4)) = 1 - \frac{32}{3}x^4 + o(x^4)$$

Dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(4x)}e^{4x^2} - 1}{x(\sin(Ax) - Ax)} = \frac{64}{A^3}$$

- Data la funzione

$$f(x) := \ln(x^2 - 1) - \sqrt{3}x$$

si ha innanzitutto che il dominio di f è l'insieme

$$\{x : x^2 - 1 > 0\} = \{x : x < -1 \text{ oppure } x > 1\}$$

che ha come punti di frontiera -1 e $+1$, a cui vanno aggiunti i "canonici" $+\infty$ e $-\infty$ (dato che il dominio è illimitato sia superiormente che inferiormente). È facile verificare che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{3}x\left(\frac{\ln(1-x^2)}{x} - 1\right) = +\infty$$

(ricordiamo che $\lim_{y\to\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$) e analogamente

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

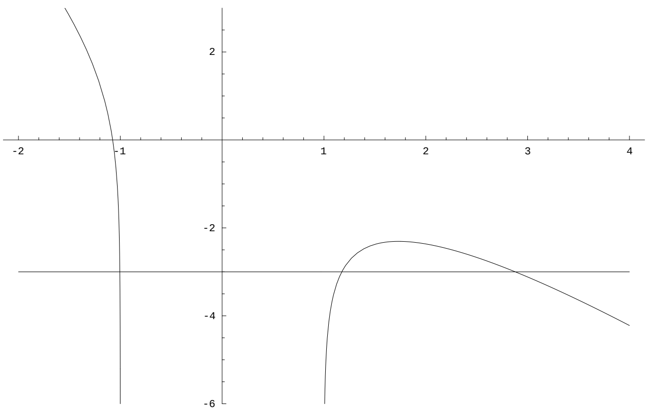
È anche facile

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty \qquad , \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty$$

per il solo fatto che l'argomento del logaritmo tende a zero. Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2-1} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}x^2 - 2x - \sqrt{3}}{x^2-1}$$

Tale espressione si annulla nei punti $x_{12} = (1 \pm \sqrt{1+3})/\sqrt{3}$, cioè in $x_1 = -1/\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$ (notiamo che il primo punto cade fuori dal dominio). Se ne deduce che $f'(x)$ è positiva per valori interni all'intervallo $[x_1, x_2]$ (e nel dominio, quindi per $1 < x \leq \sqrt{3}$), mentre è negativa per valori esterni a tale intervallo, cioè per $x < -1$ e $x \geq \sqrt{3}$. Quindi $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo locale per f con valore $f(\sqrt{3}) = \ln(4) - 3$. Si vede che tale valore è strettamente negativo perché $e > 2 \Rightarrow e^3 > 8 \Rightarrow 3 > \ln(8) > \ln(4)$. Mettendo tutto insieme si può tracciare il grafico:



Dato che $f(\sqrt{3} > -3$ ci sono esattamente tre x in cui $f(x) = -3$ (una negativa, una tra 1 e $\sqrt{3}$ e l'ultima maggiore di $\sqrt{3}$) (nel grafico riportato sopra è indicata, per confronto, la retta $y = -3$).