Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 3 giugno 2008

PRIMA PARTE (per tutti)

**(a.1)** Si consideri la successione di funzioni $f_n(x) := \dfrac{nx^2}{16 + n^4x^4}$.

1. Si dica, motivando, se la successione converge uniformemente su $[0, +\infty[$;
2. Si trovi l'insieme delle $x$ in $[0, +\infty[$ per cui la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ risulta convergente. Chiamiamo $I$ tale insieme e poniamo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ per $x$ in $I$.
3. Si dica, motivando, per quali $x$ in $I$ la $f$ (oltre a esistere) risulta continua.

*Svolgimento.* È chiaro che la successione converge puntualmente a zero. Infatti se $t = 0$ $f_n(t) = 0$, qualunque sia $n$, mentre se $t \neq 0$ $\frac{nt^2}{16+n^4t^4} \approx \frac{1}{n^3}$ che tende a zero per $n \to \infty$.

Per studiare la convergenza uniforme studiamo l'andamento di $f_n(t) = \dfrac{nt^2}{16 + n^4t^4}$. È chiaro che ogni $f_n$ tende a zero a $\pm\infty$ e che

$$f_n'(t) = 2nt\frac{16 - n^4t^4}{(16 + n^4t^4)^2}.$$

Ne segue che ogni $f_n$ raggiunge il massimo in $2/n$ dove assume il valore $f_n(2/n) = \dfrac{1}{8n}$. Questo mostra che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbf{R}} |f_n(t)| = \frac{1}{8n} \to 0$$

e dunque $f_n$ tende uniformemente a zero.

Passando alla serie è chiaro per i calcoli fatti sopra che $\sum_{n=0} f_n(x)$ è convergente per ogni $x$ ($f_n(x) \approx \frac{1}{n^3}$), cioè $I = \mathbf{R}$, mentre non si riesce a concludere che la serie è uniformemente convergente dato che $\sum_{n=0} \|f_n\|_\infty = +\infty$ (e quindi la serie non converge totalmente).

Se però fissiamo $\bar{t} > 0$, sempre dall'esame delle $f_n'$ si deduce che

$$\|f_n\|_{\infty,[\bar{t},+\infty[} = f_n(\bar{t}) = \frac{n\bar{t}^2}{16 + n^4\bar{t}^4} \leq \frac{1}{n^3\bar{t}^2} \qquad \text{se } n \geq \frac{1}{\bar{t}}.$$

Ne segue che la serie converge totalmente, e quindi uniformemente, su $[\bar{t}, +\infty[$, e come conseguenza la sua somma $f$ è una funzione continua su $[\bar{t}, +\infty[$. Dato che $\bar{t}$ si può prendere arbitrariamente vicino a zero si deduce che $f$ è continua su $]0, +\infty[$. Per motivi analoghi $f$ è continua su $]-\infty, 0[$.

Vediamo che $f$ non è continua in zero, da cui seguirà che l'insieme su cui $f$ è continua è $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Dato $t > 0$ si ha:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \geq \sum_{n=0}^{[1/t]} \frac{nt^2}{16 + n^4t^4} \geq t^2 \sum_{n=0}^{[1/t]} \frac{n}{16 + 1} = \frac{t^2}{17} \sum_{n=0}^{[1/t]} n = \frac{t^2}{17}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{t}\right]\left(\left[\frac{1}{t}\right] + 1\right) \to \frac{1}{34}$$

Dato che $f(0) = 0$ il calcolo sopra mostra che $f$ non è continua in zero, dato che $f(t)$ rimane lontana da zero per $t \to 0^+$. $\square$

**(a.2)** Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2+4)^2}\,dx.$$

*Svolgimento.* Passando all'integrale complesso e usando le techiche dei residui ha:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{(x^2+4)^2}\,dx = 2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+4)^2}, 2i\right)$$
Dato che $2i$ è un polo doppio:
$$2\pi i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{2iz}}{(z^2+4)^2}, 2i\right) = 2\pi i\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{2iz}}{(z+2i)^2}\right]_{z=2i} = 2\pi i\left[\frac{2ie^{2iz}(z+2i)^2 - e^{2iz}2(z+2i)}{(z+2i)^4}\right]_{z=2i} =$$
$$2\pi i\frac{2ie^{-4}(-16) - e^{-4}2(4i)}{4^4} = 2\pi i\left(-\frac{5e^{-4}}{32}i\right) = \frac{5\pi e^{-4}}{16}$$

da cui l'integrale complesso fa $\dfrac{5\pi e^{-4}}{6}$, che essendo reale è esattamente il valore dell'integrale richiesto. □

**(b.1)** Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier in soli coseni della funzione $f(t) = \sin(t)$, definita nell'intervallo $[0,\pi]$. Si dica poi se la serie così trovata converge uniformemente a $f$ e se la serie delle derivate converge uniformemente a $f'$.

*Svolgimento.* Si ha $f(t) \overset{L^2}{=} \sum_{k=0} v_k \cos(kt)$ ($T = \pi$ e quindi $\tilde{\omega} = 1$), dove
$$v_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi},$$
mentre se $k > 0$ (integrando due volte per parti)
$$\frac{\pi}{2}v_k = \int_0^\pi f(t)\cos(kt)\,dt = \int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt =$$
$$\left[-\cos(t)\cos(kt)\right]_0^\pi - k\int_0^\pi \cos(t)\sin(kt)\,dt =$$
$$\cos(k\pi)+1-k\left[\sin(t)\sin(kt)\right]_0^\pi + k^2\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt = \cos(k\pi)+1+k^2\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt$$
Da questa relazione si trova che, se $k > 1$
$$v_k = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(k\pi)+1}{1-k^2}.$$
Invece se $k = 1$ conviene fermarsi dopo la prima integrazione per parti:
$$\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,dt = \left[-\cos(t)\cos(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\,dt = -\int_0^\pi \cos(t)\sin(t)\,dt$$
da cui $v_1 = 0$ (quindi $v_k = 0$ per tutti i $k$ dispari). Riassumendo
$$f(t) \overset{L^2}{=} \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{h=1}^{\infty}\frac{1}{1-4h^2}\cos(2ht).$$

Dato che $v_k \approx \dfrac{cost.}{k^2}$ si ha $\sum_{k=0}^{\infty} |v_k| < +\infty$ e quindi la serie di Fourier converge uniformemente. Invece la serie delle derivate non può convergere uniformemente perché la funzione non ha derivate nulle agli estremi (mentre ogni limite uniforme nelle derivate di una serie di coseni deve avere derivate nulle a 0 e $\pi$). $\square$

**(b.2)** Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su **R**:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = H(t)\sin(t)e^{-t} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}.$$

*Svolgimento.* Calcoliamo la trasformata di Fourier del termine noto $b(t) = H(t)\sin(t)e^{-t}$:

$$\hat{b}(\omega) = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}e^{-i\omega t}\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}(e^{-(1-i+i\omega)t} - e^{-(1+i+i\omega)t})\,dt =$$
$$\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{-(1-i+i\omega)t}}{-(1-i+i\omega)} - \frac{e^{-(1-i+i\omega)t}}{-(1+i+i\omega)}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-i+i\omega} - \frac{1}{1+i+i\omega}\right) =$$
$$\frac{1}{2i}\left(\frac{-i}{\omega-1-i} - \frac{-i}{\omega+1-i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\omega-1-i} + \frac{1}{\omega+1-i}\right) = \frac{-1}{(\omega-1-i)(\omega+1-i)}$$

Trasformando secondo Fourier l'equazione:

$$(-\omega^2+i\omega+1)\hat{y}(\omega) = \frac{-1}{(\omega-1-i)(\omega+1-i)} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{1}{(\omega-1-i)(\omega+1-i)(\omega^2-i\omega-1)}$$

Dato che le radici di $\omega^2 - i\omega - 1$ sono $\frac{i}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, abbiamo

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{(\omega-1-i)(\omega+1-i)(\omega-i/2-\sqrt{3}/2)(\omega-i/2+\sqrt{3}/2)}$$

Dato che tutte le radici del denominatore scritto sopra hanno parte immaginari positiva $y(t) = 0$ per $t < 0$ mentre per $t \geq 0$, $y(t)$ sarà la somma di tutti i residui della funzione

$$g(z) := \frac{e^{izt}}{(z-1-i)(z+1-i)(z-i/2-\sqrt{3}/2)(z-i/2+\sqrt{3}/2)}$$

moltiplicati per $i$. Si ha:

$$i\mathrm{Res}\,(g(z),1+i) = \left[\frac{ie^{izt}}{(z+1-i)(z-i/2-\sqrt{3}/2)(z-i/2+\sqrt{3}/2)}\right]_{z=1+i} =$$

$$\frac{ie^{(i-1)t}}{2(i/2+1-\sqrt{3}/2)(i/2+1+\sqrt{3}/2)} = \frac{ie^{(i-1)t}}{2((i/2+1)^2-3/4)} = \frac{e^{(i-1)t}}{2}$$

$$i\mathrm{Res}\,(g(z),-1+i) = \left[\frac{ie^{izt}}{(z-1-i)(z-i/2-\sqrt{3}/2)(z-i/2+\sqrt{3}/2)}\right]_{z=-1+i} =$$

$$\frac{ie^{(-i-1)t}}{(-2)(i/2-1-\sqrt{3}/2)(i/2-1+\sqrt{3}/2)} = \frac{ie^{(-i-1)t}}{(-2)((i/2-1)^2-3/4)} = \frac{e^{(-i-1)t}}{2}$$

$$i\mathrm{Res}\left(g(z),\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \left[\frac{ie^{izt}}{(z-1-i)(z+1-i)(z-i/2+\sqrt{3}/2)}\right]_{z=,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} =$$

$$\frac{ie^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{i}{2}\right)\sqrt{3}} = \frac{ie^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2-1\right)\sqrt{3}} =$$

$$\frac{ie^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t} = \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}$$

$$i\mathrm{Res}\left(g(z),-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right) = \left[\frac{ie^{izt}}{(z-1-i)(z+1-i)(z-i/2-\sqrt{3}/2)}\right]_{z=,\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} =$$

$$\frac{ie^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{i}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1-\frac{i}{2}\right)(-\sqrt{3})} = \frac{ie^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^2-1\right)(-\sqrt{3})} =$$

$$\frac{ie^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}\right)e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t} = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)t}$$

da cui (si noti che i residui sono venuti a coppie coniugate che sommate danno il doppio della loro parte reale)

$$y(t) = H(t)\left(e^{-t}\cos(t) - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\right)$$

$\square$

SECONDA PARTE (solo per gli energetici)

**(c.1)** Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}'. \end{cases}$$

*Svolgimento.* Applicando la trasformata di Fourier (dato che $(\mathcal{F}(\delta')(\omega) = i\omega\hat{\delta}(\omega) = i\omega$ ):

$$(-\omega^2+i\omega+1)\hat{y}(\omega) = i\omega \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2+i\omega+1} = \frac{-i\omega}{(\omega-\sqrt{3}/2-i/2)(\omega+\sqrt{3}/2-i/2)}$$

(per gli stessi calcoli dell'esercizio precedente). Dato che la funzione

$$\omega \mapsto \frac{-i\omega}{(\omega - \sqrt{3}/2 - i/2)(\omega + \sqrt{3}/2 - i/2)} \approx \frac{1}{\omega}$$

è in $L^2(\mathbf{R})$, per trovare $y(t)$ possiamo usare di nuovo il metodo dei residui. Siccome tutti e due i poli hanno parte reale positiva si ha $y(t) = 0$ per $t < 0$. Per considerare il caso $t > 0$ consideriamo

$$g(z) := \frac{-ize^{itz}}{(z - \sqrt{3}/2 - i/2)(z + \sqrt{3}/2 - i/2)};$$

dato che:

$$\operatorname{Res}\left(g(z), \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left[\frac{-ize^{itz}}{z + \sqrt{3}/2 - i/2}\right]_{z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} = \frac{-i}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)t}$$

$$\operatorname{Res}\left(g(z), \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \left[\frac{-ize^{itz}}{z - \sqrt{3}/2 - i/2}\right]_{z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}} = \frac{-i}{-\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)t}$$

per $t > 0$ si ha

$$y(t) = i\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)t} + \frac{-i}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) e^{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}\right)t}\right) =$$
$$\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \Re e\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) e^{\frac{\sqrt{3}i}{2}t}\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

In definitiva

$$y(t) = H(t)e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

□

**(c.2)** Si trovino tutte le soluzioni del problema differenziale su $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' + y' + y = \delta' \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

*Svolgimento.* I problema si può trattare mediante la trasformata di Laplace. Notiamo però che l'esercizio precedente ci formisce una soluzione del problema che, oltre ad essere in $\mathcal{S}'$ è anche nulla su $]-\infty, 0[$. Dato che la soluzione è unica la soluzione è esattamente la stessa trovata nell'esercizio precedente.

Per completezza mostriamo come il problema si risolve usando Laplace. Trasformando l'equazione:

$$(z^2 + z + 1)\check{u}(z) = z \Leftrightarrow \check{u}(z) = \frac{z}{z^2 + z + 1}$$

Le radici del denominatore sono $z_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Calcoliamo i residui di $g(z) := \dfrac{ze^{tz}}{z^2 + z + 1}$ in $z_{12}$.

$$\operatorname{Res}(g(z), z_1) = \left[\frac{ze^{tz}}{2z + 1}\right]_{z=z_1} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) e^{-\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}it}}{\sqrt{3}i} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) e^{-\frac{t}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

e

$$\mathrm{Res}\,(g(z), z_2) = \overline{\mathrm{Res}\,(g(z), z_1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) e^{-\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}it}$$

da cui per $t > 0$

$$y(t) = 2\Re e\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right) e^{-\frac{t}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}it}\right) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$$

(mentre $y(t) = 0$ per $t < 0$). □

**(c.3)** Si trovi la trasformata di Fourier, nel senso delle distribuzioni, di $u(t) = \dfrac{1}{t^3 + t}$.

*Svolgimento.* Si vede facilmente che

$$\frac{1}{t^3 + t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1} = u_1(t) - u_2(t)$$

Il primo addendo (che va inteso nel senso del valore principale) ha trasformata $\hat{u}_1(\omega) = -i\pi\mathrm{sgn}(\omega)$. Il secondo addendo invece è $L^2(\mathbf{R})$ e quindi la sua trasformata si può ottenere mediante il metodo dei residui; dato che il denominatore $t^2 + 1$ ha le due radici $\pm i$, si ha:

$$\hat{u}_2(\omega) = \begin{cases} -2\pi i \mathrm{Res}\left(\dfrac{ze^{-i\omega z}}{z^2 + 1}, -i\right) & \text{se } \omega \geq 0 \\ 2\pi i \mathrm{Res}\left(\dfrac{ze^{-i\omega z}}{z^2 + 1}, i\right) & \text{se } \omega \leq 0 \end{cases}$$

Se $\omega \geq 0$ si trova (usando la formula valida in caso di poli semplici):

$$\hat{u}_2(\omega) = -2\pi i \left[\frac{ze^{-i\omega z}}{2z}\right]_{z=-i} = -\pi i e^{-\omega}$$

mentre per $\omega < 0$ si trova

$$\hat{u}_2(\omega) = 2\pi i \left[\frac{ze^{-i\omega z}}{2z}\right]_{z=i} = \pi i e^{\omega}$$

che volendo si può scrivere $\hat{u}_2(\omega) = -\pi i \mathrm{sgn}(\omega) e^{-|\omega|}$. In definitiva:

$$\hat{u}(\omega) = -\pi i \mathrm{sgn}(\omega)(e^{-|\omega|} + 1).$$

□