Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 11 febbraio 2008 -SOLUZIONI

PRIMA PARTE (per tutti)

1. Si individui l'insieme dei valori del parametro α per cui la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n^2+x) - 2\ln(n)}{n^\alpha + 1}$$

converge uniformemente su $[0,1]$.

Svolgimento. Poniamo $f_n(x) := \dfrac{\ln(n^2+x) - 2\ln(n)}{n^\alpha + 1} = \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n^2})}{1+n^\alpha}$. Dato che $\ln(1+y) \leq y$

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{n^2(n^\alpha+1)} \leq \frac{1}{n^{2+\alpha}} \qquad \text{per ogni } x \text{ in } [0,1].$$

Dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\alpha}} < +\infty \quad \text{se } \alpha > -1$$

si ottiene che la serie di partenza converge uniformemente per $\alpha > -1$. Se invece $\alpha \leq -1$, considerando la convergenza puntuale in $x = 1$ si trova la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/n^2)}{n^\alpha + 1}$$

che è divergente, perché $\dfrac{\ln(1+1/n^2)}{n^\alpha+1} \approx \dfrac{1}{n^{2+\alpha}}$.
Dunque $\alpha > -1$ è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme. □

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^4+1)(x^2+1)}\,dx$$

Svolgimento. Per parità basta calcolare l'integrale su tutto $\mathbf{R}$ e poi dividere per due. Utilizziamo il metodo dei residui. Notiamo che i poli dell'integrando sono $\pm i$ e $\dfrac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ e sono tutti semplici; calcoliamo allora i residui di $f(z) := \frac{z^4}{(z^4+1)(z^2+1)}$ nei poli con parte immaginaria positiva. Dato che i poli sono semplici si ha:

$$\operatorname{Res}(f,i) = \left[\frac{z^4}{4z^3(z^2+1)+(z^4+1)2z}\right]_{z=i} = \frac{i^4}{(i^4+1)2i} = \frac{1}{4i}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{z^4}{4z^3(z^2+1)+(z^4+1)2z}\right]_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)}{4\,(i+1)} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\operatorname{Res}\left(f,\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \left[\frac{z^4}{4z^3(z^2+1)+(z^4+1)2z}\right]_{z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} =$$

$$\frac{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)}{4\,(-i+1)} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

Se si prende la somma dei residui calcolati sopra e la si moltiplica per πi (per avere metà dell'integrale su $\mathbf{R}$) si trova l'integrale di partenza:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{(x^4+1)(x^2+1)}\,dx = \pi i\left(\frac{1}{4i}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

SECONDA PARTE (per tutti)

1. Dato il parametro α in $]0,\pi/2[$ si consideri la funzione $f_\alpha : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{t}{\alpha} & \text{se } 0 \le t \le \alpha \\ 1 - \dfrac{2t-2\alpha}{\pi-2\alpha} & \text{se } \alpha \le t \le \pi-\alpha \\ \dfrac{t-\pi}{\alpha} & \text{se } \pi-\alpha \le t \le \pi \end{cases}$$

Si dica per quali valori di α (se ce ne sono) esiste una soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + 16y = f_\alpha & \text{in } [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Sviluppiamo f_α rispetto alle funzioni $\sin(kt)$ (che si annullano agli estremi dell'intervallo). Notiamo che $f_\alpha(0) = f_\alpha(\pi) = 0$, mentre $f'_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}$ per $0 \le t < \alpha$ e per

$\pi-\alpha < x \leq \pi$, mentre $f'_\alpha(t) = -\frac{2}{\pi-2\alpha}$, se $\alpha < t < \pi-\alpha$. Allora, integrando per parti,

$$\frac{\pi}{2} f_k = \int_0^\pi f_\alpha(t)\sin(kt)\,dt = \left[-\frac{f_\alpha(t)\cos(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{k}\int_0^\pi f'_\alpha(t)\cos(kt)\,dt =$$
$$0 + \frac{1}{k}\int_0^\alpha \cos(kt)\,dt - \frac{1}{k}\frac{2}{\pi-2\alpha}\int_\alpha^{\pi-\alpha}\cos(kt)\,dt + \frac{1}{k}\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\cos(kt)\,dt =$$
$$\frac{1}{k^2}\left[\sin(kt)\right]_0^\alpha - \frac{1}{k^2}\frac{2}{\pi-2\alpha}\left[\sin(kt)\right]_\alpha^{\pi-\alpha} + \frac{1}{k^2}\left[\sin(kt)\right]_{\pi-\alpha}^{\pi} =$$
$$\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{2}{\pi-2\alpha}\right)\sin(k\alpha) - \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{2}{\pi-2\alpha}\right)\sin(k(\pi-\alpha)) =$$
$$\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{2}{\pi-2\alpha}\right)(\sin(k\alpha)+\cos(k\pi)\sin(k\alpha)) = \frac{1}{k^2}\left(1+\frac{2}{\pi-2\alpha}\right)\sin(k\alpha)(1+(-1)^k)$$

In particolare tutti i termini con k dispari sono zero mentre per k pari

$$f_k = \frac{4}{\pi k^2}\frac{\pi-2\alpha+2}{\pi-2\alpha}\sin(k\alpha).$$

Dato che il polinomio caratteristico ha la radice intera $z=4$ l'equazione ha soluzione se e solo se $f_4 = 0$, cioè se e solo se

$$\sin(4\alpha) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha = n\pi \text{ per } n \text{ intero } \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}n \text{ per } n \text{ intero}$$

Dato che $\alpha \in]0,\pi/2[$ l'unico valore possibile è $\alpha = \frac{\pi}{4}$. $\square$

2. Si trovi la soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y = \operatorname{sgn}(t)e^{-2|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Svolgimento. Usiamo la traformata di Fourier; dato che

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(t)e^{-2|t|}\right)(\omega) = \frac{-2i\omega}{\omega^2+4}$$

si ha

$$(-\omega^2-4)\hat{y}(\omega) = \frac{-2i\omega}{\omega^2+4} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{2i\omega}{(\omega^2+4)^2}.$$

Le radici del denonimatore sono $\pm 2i$ e sono doppie, come si vede facilmente.

Se $g(z) := \dfrac{2ize^{izt}}{(z^2+4)^2}$ si ha:

$$\operatorname{Res}(g,2i) = \left[\frac{d}{dz}\frac{2ize^{izt}}{(z+2i)^2}\right]_{z=2i} = \left[\frac{2ie^{izt}+2izite^{izt}}{(z+2i)^2} - 2\frac{2zie^{izt}}{(z+2i)^3}\right]_{z=2i} =$$
$$\frac{2ie^{-2t}-4ite^{-2t}}{-16} + \frac{8e^{-2t}}{-64i} = \frac{ite^{-2t}}{4}$$
$$\operatorname{Res}(g,2i) = \left[\frac{d}{dz}\frac{2ize^{izt}}{(z-2i)^2}\right]_{z=-2i} = \left[\frac{2ie^{izt}+2izite^{izt}}{(z-2i)^2} - 2\frac{2zie^{izt}}{(z-2i)^3}\right]_{z=-2i} =$$
$$\frac{2ie^{2t}+4ite^{2t}}{-16} - \frac{8e^{2t}}{64i} = -\frac{ite^{2t}}{4}$$

Ne segue, usando le formule per l'antitrasformata,

$$y(t) = i\text{Res}\,(g, 2i) = -\frac{te^{-2t}}{4} \qquad \text{per } t \geq 0$$

mentre per $t \leq 0$:

$$y(t) = -i\text{Res}\,(g, -2i) = -\frac{te^{2t}}{4} \qquad \text{per } t \leq 0$$

in altri termini

$$y(t) = -\frac{te^{-2|t|}}{4}$$

□

3. Si dica se la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)$$

converge in L^1 su $[0,1]$.

Svolgimento. Se poniamo $f_n(x) := \ln\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right) = \frac{1}{n}\ln(1+x^n)$ si ha

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_0^1 \frac{|\ln(1+x^n)|}{n}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx = \frac{1}{n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(1+n)} < +\infty$, la serie di partenza converge in $L^1([0,1])$. □

TERZA PARTE (solo per gli energetici)

1. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' = \sin(t) \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Ricordiamo che

$$\mathcal{F}(e^{i\omega_0 t}) = 2\pi\delta_{\omega_0} \Rightarrow \mathcal{F}(\sin(\omega_0 t)) = 2\pi\frac{\delta_{\omega_0} - \delta_{-\omega_0}}{2i} = -\pi i(\delta_{\omega_0} - \delta_{-\omega_0})$$

Applichiamo la trasformata di Fourier all'equazione

$$(-\omega^2 - 4i\omega)\hat{y} = -\pi i(\delta_1 - \delta_{-1}) \Leftrightarrow \hat{y} = \pi i\frac{\delta_1 - \delta_{-1}}{\omega(\omega+4i)} + c\delta \Leftrightarrow \hat{y} = \frac{\pi i}{1+4i}\delta_1 + \frac{\pi i}{-1+4i}\delta_{-1} + c\delta$$

per c arbitraria costante. Antitrasformando

$$y(t) := \frac{i}{2}\frac{1}{1+4i}e^{it} + \frac{i}{2}\frac{1}{-1+4i}e^{-it} + c_1 = \frac{i+4}{34}e^{it} + \frac{-i+4}{34}e^{-it} + c_1 =$$
$$\frac{1}{17}\Re e\left((4+i)e^{it}\right) + c_1 = \frac{4\cos(t) - \sin(t)}{17} + c_1$$

per c_1 costante arbitraria. □

2. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' + y = H(t)\cos(t) \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applicando la trasformata di Laplace

$$\check{y}(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$$

I poli sono $\pm i$ e sono doppi. Posto $g(z) := \dfrac{ze^{tz}}{(z^2+1)^2}$ si ha

$$\operatorname{Res}(g,i) = \left[\frac{d}{dz}\frac{ze^{tz}}{(z+i)^2}\right]_{z=i} = \left[\frac{e^{tz}+tze^{tz}}{(z+i)^2} - 2\frac{ze^{tz}}{(z+i)^3}\right]_{z=i} = \frac{e^{it}+ite^{it}}{-4} - 2\frac{ie^{it}}{-8i} = -\frac{ite^{it}}{4}$$

$$\operatorname{Res}(g,-i) = \overline{\operatorname{Res}(g,i)} = \frac{ite^{-it}}{4}$$

e quindi, sommando tutti i residui si trova, per

$$y(t) = H(t)2\Re e\left(-\frac{ite^{it}}{4}\right) = H(t)\frac{t\sin(t)}{2}.$$

$\square$

3. Si trovi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) della funzione $u(t) := H(-t)$ (dove H è la funzione di Heaviside).

Svogimento. Si può notare che $u(u) = H(-t) = \dfrac{1}{2}(1-\operatorname{sgn}(t))$ da cui

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}\left(2\pi\delta + \frac{2i}{\omega}\right) = \pi\delta + \frac{i}{\omega}.$$

$\square$