Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 25 gennaio 2008 -SOLUZIONI

PRIMA PARTE (per tutti)

1. Si individui l'insieme dei valori del parametro α per cui la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{x/n} - 1}{n^\alpha + 1}$$

converge uniformemente su $[0, 1]$.

Svolgimento. Poniamo $f_n(x) := \dfrac{e^{x/n} - 1}{n^\alpha + 1}$. Allora, essendo l'esponenziale crescente,

$$|f_n(x)| \leq \frac{e^{1/n} - 1}{n^\alpha + 1} \qquad \text{per ogni } x \text{ in } [0, 1]$$

e quindi $\|f_n\|_\infty \leq \dfrac{e^{1/n} - 1}{n^\alpha + 1} \approx \dfrac{1}{n(n^\alpha + 1)}$. Dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n^\alpha + 1)} < +\infty \quad \text{se } \alpha > 0$$

si ottience che la serie di partenza converge uniformemente per $\alpha > 0$. Se invece $\alpha \leq 0$, considerando la convergenza puntuale in $x = 1$ si trova la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{n^\alpha + 1}$$

che è divergente, sempre perché $\dfrac{e^{1/n} - 1}{n^\alpha + 1} \approx \dfrac{1}{n(n^\alpha + 1)}$.

Dunque $\alpha > 0$ è condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme. $\square$

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2 + 1)^2}\, dx$$

Svolgimento. Per parità si ha

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2 + 1)^2}\, dx = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(4z^2 + 1)^2}, \frac{i}{2} \right),$$

Si è usato il fatto che $z = \frac{i}{2}$ è l'unico polo con parte immaginaria positiva. Poiché tale polo è di ordine 2:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(4z^2 + 1)^2}, \frac{i}{2} \right) = \left[\frac{d}{dz} \left(z - \frac{i}{2} \right)^2 \frac{z^2}{(4z^2 + 1)^2} \right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{1}{16} \left[\frac{d}{dz} \frac{z^2}{\left(z + \frac{i}{2}\right)^2} \right]_{z=\frac{i}{2}} =$$

$$\frac{1}{16} \left[\frac{2z}{\left(z + \frac{i}{2}\right)^2} - \frac{2z^2}{\left(z + \frac{i}{2}\right)^3} \right]_{z=\frac{i}{2}} = \frac{1}{16} \left(\frac{i}{i^2} - \frac{i^2/2}{i^3} \right) = \frac{1}{16} \frac{1}{2i} = \frac{1}{32i}.$$

Quindi tornando all'integrale di partenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{32}.$$

□

SECONDA PARTE (per tutti)

1. Dato il parametro α in $]0,\pi[$ si consideri la funzione $f_\alpha : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ definita da:

$$f_\alpha(t) := \begin{cases} t & \text{se } 0 \le t \le \alpha \\ \frac{\alpha}{\pi-\alpha}(\pi - t) & \text{se } \alpha \le t \le \pi \end{cases}$$

Si dica per quali valori di α (se ce ne sono) esiste una soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + 9y = f_\alpha & \text{in } [0,\pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Sviluppiamo f_α rispetto alle funzioni $\sin(kt)$ (che si annullano algi estremi dell'intervallo). Notiamo che $f_\alpha(0) = f_\alpha(\pi) = 0$, mentre $f'_\alpha(t) = 1$ per $0 \le t < \alpha$, $f'_\alpha(t) = -\frac{\alpha}{\pi-\alpha}$, se $\alpha < t \le \pi$. Allora, integrando per parti,

$$\frac{\pi}{2} f_k = \int_0^\pi f_\alpha(t)\sin(kt)\,dt = \left[-\frac{f_\alpha(t)\cos(kt)}{k}\right]_{t=0}^{t=\pi} + \frac{1}{k}\int_0^\pi f'_\alpha(t)\cos(kt)\,dt =$$
$$0 + \frac{1}{k}\int_0^\alpha \cos(kt)\,dt - \frac{1}{k}\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\int_\alpha^\pi \cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2}\left[\sin(kt)\right]_0^\alpha - \frac{1}{k^2}\frac{\alpha}{\pi-\alpha}\left[\sin(kt)\right]_\alpha^\pi =$$
$$\frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\pi-\alpha}\right)\sin(k\alpha) = \frac{1}{k^2}\frac{\pi}{\pi-\alpha}\sin(k\alpha)$$

Dato che il polinomio caratteristico ha la radice intera $z = 3$ l'equazione ha soluzione se e solo se $f_3 = 0$, cioè

$$\sin(3\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha = n\pi \text{ per } n \text{ intero } \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}n \text{ per } n \text{ intero}$$

Dato che $\alpha \in]0,\pi[$ otteniamo che gli unici valori possibili per α sono $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$. □

2. Si trovi la soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \operatorname{sgn}(t)e^{-2|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Svolgimento. Usiamo la traformata di Fourier; dato che

$$\mathcal{F}\left(\operatorname{sgn}(t)e^{-2|t|}\right)(\omega) = \frac{-2i\omega}{\omega^2+4}$$

si ha

$$(-\omega^2 - 4\omega i + 5)\hat{y}(\omega) = \frac{-2i\omega}{\omega^2+4} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{2i\omega}{(\omega^2+4)(\omega^2+4\omega i-5)}.$$

Le radici del denonimatore sono $\pm 2i$ e $-2i \pm 1$, tutte semplici, come si vede facilmente.

Se $g(z) := \dfrac{2ize^{izt}}{(z^2+4)(z^2+4iz-5)}$ si ha:

$$\operatorname{Res}(g, 2i) = \left[\frac{2ize^{izt}}{(2z)(z^2+4iz-5)+(z^2+4)(2z+4i)}\right]_{z=2i} = -\frac{ie^{-2t}}{17}$$

$$\operatorname{Res}(g, -2i) = \left[\frac{2ize^{izt}}{(2z)(z^2+4iz-5)+(z^2+4)(2z+4i)}\right]_{z=-2i} = -ie^{2t}$$

$$\operatorname{Res}(g, -2+1i) = \left[\frac{2ize^{izt}}{(2z)(z^2+4iz-5)+(z^2+4)(2z+4i)}\right]_{z=-2i+1} =$$

$$\frac{2i(-2i+1)e^{(2+i)t}}{(-4-4i+1+4)(2)} = \frac{(2+i)e^{(2+i)t}}{(1-4i)} = \frac{(-2+9i)e^{(2+i)t}}{17}$$

$$\operatorname{Res}(g, -2-1i) = \left[\frac{2ize^{izt}}{(2z)(z^2+4iz-5)+(z^2+4)(2z+4i)}\right]_{z=-2i-1} =$$

$$\frac{2i(-2i-1)e^{(2-i)t}}{(-4+4i+1+4)(2)} = \frac{(2-i)e^{(2-i)t}}{(1+4i)} = \frac{(2+9i)e^{(2-i)t}}{17}$$

Ne segue, usando le formule per l'antitrasformata,

$$y(t) = i\operatorname{Res}(g, 2i) = \frac{ie^{-2t}}{17} \qquad \text{per } t \geq 0$$

mentre per $t \leq 0$:

$$y(t) = -i \sum_{\Im m(z)<0} \operatorname{Res}(g, z) = -e^{2t} + 2e^{2t}\Re e\left(\frac{(9+2i)e^{it}}{17}\right) = -e^{2t} + e^{2t}\frac{18\cos(t) - 4\sin(t)}{17}$$

$\square$

3. Si dica se la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x^n)}{1+n}$$

converge in L^1 su $[0, 1]$.

Svolgimento. Se poniamo $f_n(x) := \dfrac{\sin(\pi x^n)}{1+n}$ ha

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_0^1 \frac{|\sin(\pi x^n)|}{1+n}\,dx \leq \int_0^1 \frac{\pi x^n}{1+n}\,dx = \frac{\pi}{1+n}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{\pi}{(1+n)^2}.$$

Dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{(1+n)^2} < +\infty$, la serie di partenza converge in $L^1([0, 1])$. $\square$

TERZA PARTE (solo per gli energetici)

1. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Fourier

$$(-\omega^2 - 4i\omega)\hat{y} = 1 \Leftrightarrow \hat{y} = -\frac{1}{\omega(\omega+4i)} + c\delta \Leftrightarrow \hat{y} = \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{\omega+4i} - \frac{1}{\omega}\right) + c\delta$$

per c arbitraria costante. Dato che

$$y_1(t) := -i\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izt}}{4i(z+4i)}, -4i\right) = -H(t)\frac{e^4t}{4}$$

e che

$$y_2(t) := \mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{1}{4i\omega}\right)(t) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{8}$$

si ha

$$y(t) = \frac{\mathrm{sgn}(t)}{8} - H(t)\frac{e^4t}{4} + cost. = \frac{H(t)}{4}(1-e^{4t}) + cost.$$

□

2. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y = H(t)\cos(t) \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applicando la trasformata di Laplace

$$\check{y}(z) = \frac{z}{(z^1+1)(z^2-4)}$$

I poli sono $\pm i$ e ± 2 tutti semplici. Posto $g(z) := \dfrac{ze^{tz}}{(z^2+1)(z^2-4)}$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(g,i) &= \left[\frac{ze^{tz}}{2z(z^2-4)+2z(z^2+1)}\right]_{z=i} = \left[\frac{e^{tz}}{2(z^2-4)+2(z^2+1)}\right]_{z=i} = -\frac{e^{it}}{10}, \\
\mathrm{Res}\,(g,-i) &= \overline{-\frac{e^{it}}{10}} = -\frac{e^{-it}}{10}, \\
\mathrm{Res}\,(g,2) &= \left[\frac{e^{tz}}{2(z^2-4)+2(z^2+1)}\right]_{z=2} = \frac{e^{2t}}{10}, \\
\mathrm{Res}\,(g,2) &= \left[\frac{e^{tz}}{2(z^2-4)+2(z^2+1)}\right]_{z=-2} = \frac{e^{-2t}}{10}.
\end{aligned}$$

e quindi, sommando tutti i residui si trova, per

$$y(t) = H(t)\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}-e^{it}-e^{-it}}{10}\right) = \frac{H(t)}{5}(\cosh(2t) - \cos(t))$$

□

3. Si trovi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) di $u(t) = |t|$.

Svogimento. Dato che $u(t) := |t| = t\mathrm{sgn}(t)$, si ha

$$\hat{u}(\omega) = \mathcal{F}(t\mathrm{sgn}(t))(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}(\mathrm{sgn}(t))(\omega) = i\frac{d}{d\omega}\frac{-2i}{\omega} = -\frac{2}{\omega^2}.$$

□