Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta dell' 8 gennaio 2008 - SOLUZIONI

1. Si individui l'insieme dei valori del parametro α per cui la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^\alpha + 1}$$

converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

Svolgimento. Poniamo $f_n(x) := \dfrac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^\alpha + 1}$ e proviamo a verificare il criterio della convergenza assoluta rispetto alla norma uniforme. Si ha:

$$\|f_n\|_\infty = \max_{[0,1]} f_n = \max_{0 \le x \le 1} \frac{\cos(\sqrt{n}x)}{n^\alpha + 1} \le \frac{1}{n^\alpha + 1}.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha + 1} < +\infty$ se $\alpha > 1$ si deduce che la serie di funzioni converge uniformemente per $\alpha > 1$.

Vediamo ora che la serie non converge uniformemente se $\alpha \le 1$. Per questo basta osservare che la serie non converge in $x = 0$ dato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha + 1} = +\infty \qquad \text{se } \alpha \le 1.$$

In definitiva la serie converge uniformemente se e solo se $\alpha > 1$. $\square$

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x+2)}\, dx$$

Svolgimento. Per la formula vista a lezione (Proposizione (3.7.16) con $\alpha = -\frac{1}{4}$):

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}(x+2)}\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}i}} \mathrm{Res}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}(z+2)}, -2\right) = \frac{2\pi i}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}i}} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right]_{z=-2} =$$
$$\frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{\pi}{2}i}} \frac{1}{\sqrt[4]{2e^{\pi i}}} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \frac{2i}{1 - e^{\frac{\pi}{2}i}} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}i}} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \frac{2i}{e^{\frac{\pi}{4}i} - e^{\frac{-\pi}{4}i}} = \frac{\pi}{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} = \pi\sqrt[4]{2}$$

$\square$

3. Si consideri la funzione f definita da:

$$f(t) := \begin{cases} t(\pi - t) & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ (t-\pi)(t-2\pi)) & \text{se } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

e prolungata a tutto $\mathbf{R}$ in modo da risultare 2π-periodica.

Si trovi lo sviluppo in serie di Fourier di f.

Svolgimento. Notiamo che:

$$f'(t) := \begin{cases} \pi - 2t & \text{se } 0 \le t \le \pi \\ 2t - 3\pi & \text{se } \pi \le t \le 2\pi \end{cases}, \qquad f''(t) := \begin{cases} -2 & \text{se } 0 < t < \pi \\ 2 & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

e che $f(0) = f(2\pi) = 0$ mentre $f'(0) = f'(2\pi) = \pi$. Allora se vogliamo scrivere $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ abbiamo

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,dt =$$
$$\frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi in}\left[f'(t)\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi in}\int_0^{2\pi} f''(t)\frac{e^{-int}}{-in}\,dt =$$
$$-\frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{2\pi} f''(t)e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{\pi} 2e^{-int}\,dt - \frac{1}{2\pi n^2}\int_\pi^{2\pi} 2e^{-int}\,dt =$$
$$\frac{1}{\pi n^2}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2}\left[\frac{e^{-int}}{-in}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{i}{\pi n^3}\left(e^{-in\pi} - 1\right) - \frac{i}{\pi n^3}\left(1 - e^{-in\pi}\right) = \frac{2i}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right).$$

Quindi

$$f(t) = \frac{2i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^3}e^{int} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(nt) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)t).$$

□

4. Si trovi la soluzione del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y = e^{-|t|+1} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

Svolgimento. Se $f(t) := e^{-|t|+1} = ee^{-|t|}$, si ha:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2e}{1+\omega^2}$$

da cui, applicando la trasformata di Fourier all'equazione

$$(-\omega^2 - 4)\hat{y}(\omega) = \frac{2e}{1+\omega^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{-2e}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}.$$

Antitrasformando mediante il metodo dei residui:

$$y(t) = \begin{cases} i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, 2i\right)\right] & \text{se } t > 0 \\ -i\left[\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, -i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, -2i\right)\right] & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Dato che:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, i\right) &= \left[\frac{-2ee^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+4)+2\omega(\omega^2+1)}\right]_{\omega=i} = \frac{-ee^{-t}}{3i}\\
\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, 2i\right) &= \left[\frac{-2ee^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+4)+2\omega(\omega^2+1)}\right]_{\omega=2i} = \frac{ee^{-2t}}{6i}\\
\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, -i\right) &= \left[\frac{-2ee^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+4)+2\omega(\omega^2+1)}\right]_{\omega=-i} = \frac{ee^{t}}{3i}\\
\operatorname{Res}\left(\frac{-2ee^{i\omega t}}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}, -2i\right) &= \left[\frac{-2ee^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+4)+2\omega(\omega^2+1)}\right]_{\omega=-2i} = \frac{-ee^{2t}}{6i}
\end{aligned}$$

si ottiene:

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{e^{-t+1}}{3} + \frac{e^{-2t+1}}{6} & \text{se } t>0 \\ -\frac{e^{t+1}}{3} + \frac{e^{2t+1}}{6} & \text{se } t<0 \end{cases} = -\frac{e^{-|t|+1}}{3} + \frac{e^{-|2t|+1}}{6}.$$

□

5. Si dica se la serie di funzioni

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+n^4x^2}$$

converge in L^1 su $[0, +\infty[$.

Svolgimento. Indichiamo $f_n(t) := \dfrac{\sin(x)}{1+n^4x^2} = \dfrac{\sin(x)}{1+(n^2x)^2}$.

Verifichiamo il criterio della convergenza assoluta (rispetto alla norma L^1). Si ha:

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+n^2x^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y/n^2)}{1+y^2}\,dy \leq$$
$$\frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2n^2}$$

(abbiamo usato $y = n^2x$ da cui $x = \dfrac{y}{n^2}$ e $dx = \dfrac{dy}{n^2}$). Dato che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$, la serie di funzioni risulta assolutamente convergente e quindi convergente in $L^1([0, +\infty[)$. □

6. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Fourier: si ottiene:

$$(-\omega^2 - 4\omega i + 8)\hat{y}(\omega) = 1 \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - 4i\omega + 8}.$$

Il denominatore ha due radici semplici in $\omega = \dfrac{2i \pm \sqrt{-4+8}}{-1} = -2i \pm 2$. Quindi:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t>0 \\ -i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2-4i\omega+8}, -2i+2\right) - i\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2-4i\omega+8}, -2i-2\right) & \text{se } t<0 \end{cases}.$$

Dato che

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2-4i\omega+8}, -2i+2\right) = \left[\frac{e^{i\omega t}}{-2\omega-4i}\right]_{\omega=-2i+2} = \frac{e^{2t+2it}}{-4},$$
$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{i\omega t}}{-\omega^2-4i\omega+8}, -2i-2\right) = \left[\frac{e^{i\omega t}}{-2\omega-4i}\right]_{\omega=-2i-2} = \frac{e^{2t-2it}}{4},$$

si trova:

$$y(t) = H(-t)(-i)e^{2t}\frac{(-e^{2it}+e^{-2it})}{4} = -\frac{H(-t)}{2}e^{2t}\sin(2t).$$

□

7. Si trovino le soluzioni del problema differenziale:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = H(t)\cos(t) \\ y(t) = 0 \qquad \text{per } t < 0. \end{cases}$$

Svolgimento. Applichiamo la trasformata di Laplace a entrambi i membri dell'equazione. Si ha:

$$(z^2-4z+8)\check{y}(z) = \frac{z}{z^2+1} \Leftrightarrow \check{y}(z) = \frac{z}{(z^2-4z+8)(z^2+1)}.$$

Il denominatore ha quattro radici semplici in $z = \pm i$ e $z = 2 \pm 2i$. Applicando le tecniche dei residui (notiamo che i residui nei poli coniugati sono i coniugati dei residui):

$$y(t) = \sum_{w=\pm i, w=2\pm 2i} \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{zt}}{(z^2-4z+8)(z^2+1)}, w\right) =$$
$$\sum_{w=\pm i, w=2\pm 2i}\left[\frac{ze^{zt}}{(2z-4)(z^2+1)+(z^2-4z+8)2z}\right]_{z=w} =$$
$$2\Re e\left(\frac{ie^{it}}{(-1-4i+8)2i}\right) + 2\Re e\left(\frac{(2+2i)e^{(2+2i)t}}{4i(4+8i-4+1)}\right) =$$
$$\Re e\left(\frac{e^{it}}{7-4i}\right) + \Re e\left(\frac{(1+i)e^{(2+2i)t}}{-8+i}\right) = \Re e\left(\frac{(7+4i)e^{it}}{65}\right) + e^{2t}\Re e\left(\frac{(-7-9i)e^{2it}}{65}\right) =$$
$$\frac{7}{65}\cos(t) - \frac{4}{65}\sin(t) - \frac{7}{65}e^{2t}\cos(2t) + \frac{9}{65}e^{2t}\sin(2t)$$

per $t > 0$, mentre $y(t) = 0$ per $t < 0$. □

8. Si trovi la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni) di $u(t) = \dfrac{1}{t^2-1}$.

Svolgimento. Indichiamo con v la distribuzione $v.p.\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Si ha:

$$u(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{2}(v(t-1) - v(t+1))$$

Quindi

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2}(e^{-i\omega}\hat{v}(\omega) - e^{i\omega}\hat{v}(\omega)) = \frac{1}{2}(e^{-i\omega} - e^{i\omega})(-i)\pi\operatorname{sgn}(\omega) = -\pi\operatorname{sgn}(\omega)\sin(\omega).$$

□