Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta del 15 febbraio 2010

(a.1) Data la successione di funzioni $f_n : [0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - nx}{n^\alpha} & \text{se } 0 \le x \le n \\ 0 \text{ se } x > n \end{cases}$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $[0,+\infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $[0,+\infty[$.
3. $(*)$ Si dica per quali α la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $[0,+\infty[$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2+4}\, dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni $f_n :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 n^\alpha + 4}.$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0,+\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha = 3$ la serie converge in $L^2(]0,+\infty[)$.
3. $(*)$ Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0,1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' = te^{-|t|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \delta \\ y = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y' e y''.

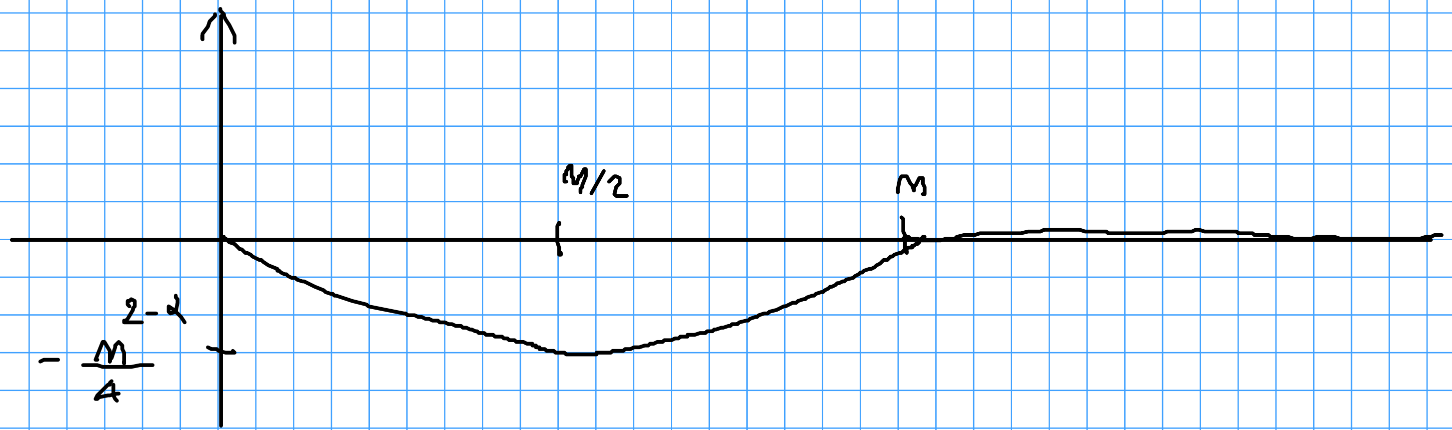
(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y''' + y' = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Complementi di Matematica - Compito del 15/2/2010

(a.1) $$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - nx}{n^\alpha} & \text{se } x \in [0, n] \\ 0 & \text{se } x > n \end{cases}$$

f_n rappresenta un arco di parabola tra 0 e n con vertice in $\frac{n}{2}$



messa poi a zero se $x \geq n$. Il valore nel vertice è $f_n\left(\frac{n}{2}\right) = -\frac{n^{2-\alpha}}{}$

(1) Per la conv. puntuale bisogna esaminare la serie $\sum_{n=1} \frac{x^2 - nx}{n^\alpha}$ per x finato. Il termine generale di tale serie è asintotico a $-\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ che dà luogo a una serie convergente se e solo se $\alpha - 1 > 1 \iff \boxed{\alpha > 2}$. Dunque $S(x)$ esiste per $\alpha > 2$

(2) Fissato $M>0$ si ha che per $n > 2M$ il massimo di $|f_n|$ su $[0, M]$ è assunto in $x = M$. Dunque se $n \geq 2M$

$$\|f_n\|_{\infty,[0,M]} = \left|\frac{M^2 - nM}{n^\alpha}\right| \simeq -\frac{M}{n^{\alpha-1}}$$

Se $\alpha > 2$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,M]}$ risulta convergente $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. unif. su $[0, M] \Rightarrow S(x)$ è continua su $[0, M]$.

Dato che M è arbitrario $S(x)$ è continua su $[0, +\infty[$

(3) Se considero $\|f_n\|_\infty = \max_{[0,+\infty[} |f_n|$ trovo $\frac{n^{2-\alpha}}{4}$ che dà luogo a una serie convergente solo per $2-\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha > 3}$

Per tali valori di α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ risulta totalmente (quindi unif.) convergente su $[0, +\infty[$

Vediamo che per $\alpha \leq 3$ la serie non è unif. conv su $[0, +\infty[$

Se lo fosse avremmo, per le proprietà della conv. unif.

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Mostriamo che, per $\alpha = 3$, questo non succede (a maggior ragione non può valere per $\alpha < 3$). Se $K \in \mathbb{N}$ si ha

$$S(K) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(K) = \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{K^2 - Kn}{n^3} \leq \sum_{n=2K+1}^{3K} \frac{K^2 - Kn}{n^3} \leq \sum_{n=2K+1}^{3K} \frac{K^2 - K\cdot 3K}{(3K)^3}$$

$$= K \frac{-2K^2}{27K^3} = -\frac{2}{27} < 0 \Rightarrow \text{NON PUÒ ESSERE } S(K) \to 0 \text{ per } n \to +\infty$$

(a.2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{4+x^2}\,dx = \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{4}}} \sum \text{residui} = \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{\pi}{2}i}} \sum_{w=\pm 2i} \operatorname{Res}(g,w)$$

dove $g(z) = \dfrac{z^{1/4}}{4+z^2}$ e con $z^{1/4}$ intendo $(\rho e^{i\theta})^{\frac{1}{4}} = \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i\theta}{4}}$

dove $\rho \geq 0$ $\underline{\theta \in [0, 2\pi[}$. Allora

$$\operatorname{Res}(g,i) = \frac{z^{1/4}}{2z}\bigg|_{z=2i} = \frac{\sqrt[4]{2}\,(e^{\frac{i\pi}{2}})^{1/4}}{4i} = \sqrt[4]{2}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{4i}$$

$$\operatorname{Res}(g,-i) = \frac{z^{1/4}}{2z}\bigg|_{z=-2i} = \frac{\sqrt[4]{2}\,(e^{\frac{i3\pi}{2}})^{1/4}}{-4i} = -\frac{\sqrt[4]{2}\,e^{\frac{i3\pi}{8}}}{4i}$$. Allora l'integrale è

$$\frac{\sqrt[4]{2}\,\cancel{2}\pi i}{1-i}\,\frac{e^{\frac{i\pi}{8}} - e^{\frac{i3\pi}{8}}}{2\,\cancel{4}\,i} = \frac{\sqrt[4]{2}\pi i}{1-i}\,e^{\frac{i\pi}{4}}\,\frac{e^{-\frac{i\pi}{8}} - e^{\frac{i\pi}{8}}}{2i} = \frac{\sqrt[4]{2}\pi i}{1-i}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) =$$

$$\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{2}}{2}\pi\,\frac{(i-1)}{1-i}\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) \boxed{= \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\pi \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \sqrt[4]{8}\,\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\,\pi$$

(5.1) $$f_n(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{x^2 n^\alpha + 4}$$

1. Calcoliamo la norma L^1 — se uso il cambio di variabile $x = \frac{y}{\sqrt{n^\alpha}}$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{n^\alpha x^2+4}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{y\, n^{-\alpha/2}}\; n^{-\alpha/2}\,dy}{y^2+4} = \frac{1}{n^{\frac{5}{8}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{y}}{y^2+4}\,dy$$

Ne segue che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty \iff \frac{5}{8}\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha > \frac{8}{5}}$

Per tali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,+\infty))$. D'altra parte non può convergere in L^1 se $\alpha \leq \frac{8}{5}$. Infatti se lo facesse

$$\infty > \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{8}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{y}}{y^4+4}\,dy = +\infty$$

(2) Calcoliamo la norma L^2. — con la stessa sostituzione:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(n^\alpha x^2+4)^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y\, n^{-\alpha/2}}\; n^{-\alpha/2}\,dy}{(y^2+4)^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{(4+y^2)^2}\,dy$$

$$\Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{3/8\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{y}}{(4+y^2)^2}\,dy \right)$$ e quindi

$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \iff \frac{3}{8}\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{8}{3}$. Dato che $3 > \frac{8}{3}$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. in $L^2([0,+\infty[)$

(3) Se calcolo la norma L^1 su $[0,1]$: trovo

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{n^\alpha x^2+4}\,dx = \frac{1}{n^{\frac{5}{8}\alpha}} \int_0^{\sqrt{n^\alpha}} \frac{\sqrt[4]{y}\,dy}{y^2+4} \simeq \frac{1}{n^{\frac{5}{8}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{y}}{y^2+4}\,dy$$

(dato che, per $n \to \infty$ $\int_0^{\sqrt{n^\alpha}} \frac{\sqrt[4]{y}\,dy}{y^2+4} \to \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{y}\,dy}{y^2+4} \in]0,+\infty[$). Dunque (come nel punto uno) la serie converge in $L^1([0,1])$ se $\alpha > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > 8/5}$

Ragionando come nel punto 1 si vede che tale condizione è anche necessaria.

(b.2) $y'' - 4y' = t\,e^{-|t|}$

Ricordiamo che $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \frac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow \mathcal{F}(t\,e^{-|t|}) = i\frac{d}{d\omega}\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-4\omega i}{(1+\omega^2)^2}$. Trasformando con Fourier l'equazione:

$$(-\omega^2 - 4i\omega)\,\hat{y}(y) = \frac{-4\omega i}{(1+\omega^2)^2} \Leftrightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{4i}{(\omega+4i)(\omega^2+1)^2}$$

Abbiamo quindi un polo semplice $-4i$ e due doppi $\pm i$

Se $g(z) = \frac{4i\,e^{izt}}{(z+4i)(z^2+1)^2}$ si ha:

$$\mathrm{Res}(g, 4i) = \left.\frac{4i\, e^{izt}}{(z^2+1)^2}\right|_{z=-4i} = \frac{4i\, e^{4t}}{(-16+1)^2} = \frac{4i\, e^{4t}}{225}$$

$$\mathrm{Res}(g, i) = \left.\frac{d}{dz}\frac{4i\, e^{izt}}{(z+4i)(z+i)^2}\right|_{z=i} = 4i\, \frac{it\, e^{izt}(z+4i)(z+i)^2 - \cdots}{(z+4i)^2(z+i)^4}$$

$$\left.\frac{-e^{izt}\left[(z+i)^2 + (z+4i)\,2(z+i)\right]}{}\right|_{z=i} =$$

$$4i\, e^{-t}\, \frac{it(5i)(2i)^2 - (2i)^2 - 2(5i)(2i)}{(5i)^2(2i)^4} = \frac{4i\, e^{-t}}{-25\cdot 16}(20t+24) =$$

$$-\frac{5t+6}{25}\, i\, e^{-t}$$

$$\mathrm{Res}(g, -i) = \left.\frac{d}{dz}\frac{4i\, e^{izt}}{(z+4i)(z-i)^2}\right|_{z=-i} = 4i\, \frac{it\, e^{izt}(z+4i)(z-i)^2 - \cdots}{(z+4i)^2(z-i)^4}$$

$$\left.\frac{-e^{izt}\left[(z-i)^2 + (z+4i)\,2(z-i)\right]}{}\right|_{z=-i} =$$

$$4i\, e^{t}\, \frac{it(3i)(-2i)^2 - (-2i)^2 - 2(3i)(-2i)}{(3i)^2(-2i)^4} = \frac{4ie^{t}}{-9\cdot 16}(12t-8) =$$

$$= -\frac{i\, e^{t}}{9}(3t-2)$$

Dunque

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(i) = \dfrac{5t+6}{25} e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ -i\left(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}(-4i)\right) = \dfrac{2-3t}{9} e^{t} + \dfrac{4}{225} e^{4t} & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

(c.1) $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = \delta \\ y = 0 \quad \text{su }]-\infty, 0[\end{cases}$ Trasformiamo con Laplace

$$(z^2 - 4z + 5)\,\check{y}(z) = 1 \implies \check{y}(z) = \frac{1}{z^2-4z+5}.$$

Le radici sono $2 \pm i$. Se $g(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2-4z+5}$

si ha:

$$\operatorname{Res}(g, 2+i) = \left.\frac{e^{zt}}{2z-4}\right|_{z=2+i} = \frac{e^{2t}e^{it}}{4+2i-4} = e^{2t}\frac{e^{it}}{2i}$$

$\operatorname{Res}(g, 2-i) = e^{2t}\dfrac{e^{-it}}{-2i}$ (passando al coniugato) $\implies$ per $t > 0$

$$y(t) = 2\operatorname{Re}\left(e^{2t}\frac{e^{it}}{2i}\right) = e^{2t}\operatorname{Re}\left(\frac{\cos(t)}{i} + \sin(t)\right) = e^{2t}\sin(t)$$

In definitiva $$y(t) = H(t)\, e^{2t} \sin(t)$$

Facciamo le derivate

$$y'(t) = \underbrace{\delta\, e^{2t} \sin(t)}_{=0} + H(t)\, 2e^{2t} \sin(t) + H(t)\, e^{2t} \cos(t) =$$

$$H(t)\, e^{2t} \left(\cos(t) + 2\sin(t) \right)$$

$$y''(t) = \underbrace{\delta \cdot e^{2t} \left(\cos(t) + 2\sin(t) \right)}_{=\delta} + H(t)\, 2e^{2t} \left(\cos(t) + 2\sin(t) \right)$$
$$+ H(t)\, e^{2t} \left(-\sin(t) + 2\cos(t) \right)$$

$$= \delta + H(t)\, e^{2t} \left(4\cos(t) + 3\sin(t) \right)$$

VERIFICHIAMO CHE VALE L'EQUAZIONE:

$$y'' - 4y' + 5y = \delta + H(t)\, e^{2t} \Big(4\cos(t) + 3\sin(t) - 4\cos(t)$$
$$- 8\sin(t) + 5\sin(t) \Big) = \delta \qquad \underline{\text{ok}}$$

(c.2) $\quad y''' + y' = \delta$ $\qquad$ Trasformiamo con Fourier:

$$\left[(i\omega)^3 + (i\omega) \right] \hat{y} = 1 \iff i\omega(-\omega^2+1)\hat{y} = 1$$

Cerchiamo prima di tutto le soluzioni di $\quad i\omega(1-\omega^2) y_0 = 0$

$\iff \quad y_0 = \alpha\,\delta(t) + \beta\,\delta(t-1) + \gamma\,\delta(t+1) \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

Allora la $\hat{y}$ sarà data da $y_0 + \overline{y}$ dove $\overline{y}$ è una soluzione di $\quad \omega(\omega-1)(\omega+1)\,\overline{y} = i$

Per trovarla troviamo A B C tali che $\underbrace{\dfrac{i}{\omega(\omega-1)(\omega+1)}}_{h(\omega)} = \dfrac{A}{\omega} + \dfrac{B}{\omega-1} + \dfrac{C}{\omega+1}$

$$\iff \quad A = \text{Res}(h, 0) = -i$$
$$B = \text{Res}(h, 1) = \frac{i}{2}$$
$$C = \text{Res}(h, -1) = \frac{i}{2}$$

per cui posso prendere $\quad \overline{y} = i\left(-(\text{v.p.})\dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{2}(\text{v.p.})\dfrac{1}{\omega-1} + \dfrac{1}{2}(\text{v.p.})\dfrac{1}{\omega+1} \right)$

Antitrasformando:

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) - \frac{1}{4} e^{it}\,\mathrm{sgn}(t) - \frac{1}{4} e^{-it}\,\mathrm{sgn}(t) + \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} e^{it} + \frac{\gamma}{2\pi} e^{-it}$$

$$= \frac{1}{4}\,\mathrm{sgn}(t)\Big(2 - 2\cos(t)\Big) + \alpha' + \beta'\cos(t) + \gamma'\sin(t)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)\big(1-\cos(t)\big) + \alpha' + \beta'\cos(t) + \gamma'\sin(t)}$$

per α', β', γ' costanti arbitrarie.