Complementi di Matematica - Ingegneria Energetica/Elettrica/Sicurezza
Prova scritta dell' 8 gennaio 2010

(a.1) Data la successione di funzioni $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{n^\alpha x}{(n+|x|)^2}.$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge puntualmente su $]-\infty, \infty[$.
2. Si determini se per i valori di α trovati al punto precedente la somma $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ della serie è continua su $\mathbf{R}$.
3. $(*)$ Si dica per quali α la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$.

(a.2) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{4+x^2}\, dx$$

(b.1) Data la successione di funzioni $f_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}$ definite da

$$f_n(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x}(n^\alpha + |x|)^2}.$$

1. Si dica per quali α in $\mathbf{R}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, +\infty[)$.
2. Si dica se per $\alpha = \frac{2}{3}$ la serie converge in $L^2(]0, +\infty[)$.
3. $(*)$ Si dica per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1(]0, 1])$.

(b.2) Si trovi la soluzione del problema differenziale di $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y'' - y = e^{-|x|} \\ y \in L^2(\mathbf{R}) \end{cases}$$

(c.1) Si trovi la soluzione del problema differenziale

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 17y = \delta \\ y = 0 \text{ su }]-\infty, 0[\end{cases}$$

e trovata la soluzione y si calcolino y''' e y^{iv}.

(c.2) Utilizzando la trasformata di Fourier si trovino tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Aiuto: se $P(z) = z^3 + z^2 + z + 1$ allora $P(i\omega) = -i(\omega - i)(\omega + 1)(\omega - 1)$.

(2.1) $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x}{(n+|x|)^2}$

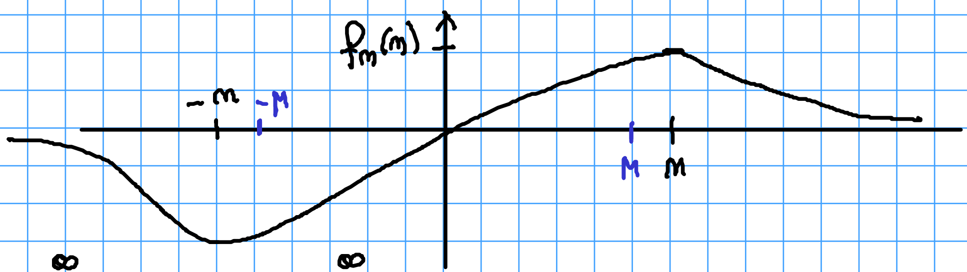
Facciamo uno studio del grafico di f_n. Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = f_n(0) = 0.$$

$$f_n'(x) = \frac{n^\alpha (n+|x|)^2 - n^\alpha x \cdot 2(n+|x|)\,\mathrm{sgn}(x)}{(n+|x|)^4} =$$

$$\frac{n^\alpha}{(n+|x|)^3}\left\{(n+|x|) - 2|x|\right\} = \frac{n^\alpha}{(n+|x|)^3}(n-|x|)$$

Dunque $f_n'(x)=0 \iff x = \pm n$. Notiamo che f_n è dispari.



Inoltre si ha

$$f_n(n) = \frac{n^{\alpha-1}}{4}$$

ALLORA

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-\alpha}} \frac{x}{(1+|x|/n)^2}$, a x fissato

converge se e solo se $2-\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha < 1}$

(2) Fissiamo $M>0$ e consideriamo le f_n ristrette a $[-M,M]$. Dallo studio del grafico visto sopra si ricava che, per $n > M$

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} = f_n(M) = \frac{1}{n^{2-\alpha}} \frac{M}{(1+M/n)} \le \frac{M}{n^{2-\alpha}}.$$

Dato che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^{2-\alpha}} < +\infty$ se $\alpha<1$, allora $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ conv. totalmente su $[-M,M]$ e quindi la sua somma è continua su $[-M,M]$.

Dato che M è arbitrario, tale somma è continua su $]-\infty,+\infty[$.

(3) Dallo studio preliminare si vede che

$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{4}\frac{1}{n^{1-\alpha}}.$$ Ne segue che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalm. su $\mathbb{R}$ se e solo se $1-\alpha > 1 \iff \underline{\underline{\alpha < 0}}$. Dunque se $\alpha<0$ la serie converge uniformemente su $\mathbb{R}$.

Vediamo che se $\alpha = 0$ la serie non conv. unif. su $\mathbb{R}$.

Se convergesse dovrebbe essere:

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \quad , \quad \text{ma se } m\in\mathbb{N}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(m) \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{(n+m)^2} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{m}{(2m)^2} = \frac{m^2}{4m^2} = \frac{1}{4}$$

e quindi non è possibile che $\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(m) = 0$.

È chiaro poi che se non conv. unif. per $\alpha=0$, a maggior ragione non converge per $\alpha>0$. In definitiva la serie conv. unif. per $\boxed{\alpha<0}$

(Q.2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{4+x^2}\,dx = (*)$$

Per la formula vista a lezione (con $\alpha = 1/3$), se $f(z) = \dfrac{z^{1/3}}{4+z^2}$

$$(*) = \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2}{3}\pi i}}\Big(\mathrm{Res}(f,2i) + \mathrm{Res}(f,-2i)\Big)$$

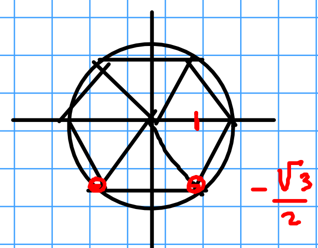
(dove, se $z=\rho e^{i\theta}$ con $0\leq\theta<2\pi$, allora $z^{\frac13} = \rho^{\frac13} e^{\frac{i\theta}{3}}$ e

dove si è usato il fatto che f ha solo due poli in $\pm 2i$ - poli semplici). Allora

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \frac{z^{1/3}}{2z}\Big|_{z=2e^{\frac{\pi i}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{6}}}{e^{\frac{\pi i}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\,e^{\frac{-\pi i}{3}}$$

$$\mathrm{Res}(f,-2i) = \frac{z^{1/3}}{2z}\Big|_{z=2e^{\frac{3\pi i}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{e^{\frac{3\pi i}{2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{4}\,e^{-\pi i} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad (*) = \frac{2\pi i}{\left(1-e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)}\left(e^{-\frac{\pi i}{3}}-1\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{4} =$$



$$\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,\pi\,\frac{\left(e^{-\frac{\pi}{3}i}-1\right)\left(1-e^{-\frac{2}{3}\pi i}\right)i}{\left(1-e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)\left(1-e^{-\frac{2}{3}\pi i}\right)} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,\pi\,\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i} - \cancel{e^{-\pi i}} - \cancel{1} + e^{-\frac{2}{3}\pi i}}{2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\,i = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\,\pi\,\frac{\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i}{2-2(-1/2)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pi \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \quad = \boxed{\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}\,\pi}{8}}$$

(b.1) $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x}\,(n^\alpha + x)^2}$.

(1) Calcoliamo la norma $L^1(]0,+\infty[)$:

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{x}\,(n^\alpha+x)^2}\,dx = \left(\text{pongo } x = n^\alpha y \Rightarrow dx = n^\alpha dy\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{n^\alpha dy}{n^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt[4]{y}\; n^{2\alpha}(1+y)^2} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}\,(1+y)^2}$$

Se ne deduce che $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_1 < +\infty \iff \frac{5}{4}\alpha > 1 \iff \boxed{\alpha > \frac{4}{5}}$

Dunque per $\alpha > \frac{4}{5}$ la serie conv. in $L^1(]0,+\infty[)$. Invece per $\alpha \le \frac{4}{5}$ la serie non può convergere perché se convergesse

$$\mathbb{R} \ni \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum \|f_n\|_1 = +\infty$$

ASSURDO.

(2) Consideriamo la norma $L^2(]0,+\infty[)$:

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(n^\alpha+x)^4} = \left(x = n^\alpha y\right) = \int_0^{+\infty} \frac{n^\alpha dy}{n^{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{y}\; n^{4\alpha}(1+y)^4}$$

$$= \frac{1}{n^{\frac{7}{2}\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}\,(1+y)^4} \Rightarrow \|f_n\|_2 = \frac{1}{n^{\frac{7}{4}\alpha}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}\,(1+y)^4}\right)^{1/2}$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < +\infty \iff \frac{7}{4}\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{4}{7}$

Se $\alpha = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ allora $\alpha > \frac{4}{7}$ e quindi la serie conv. L^2.

(3) Consideriamo la norma $L^1(]0,1])$ $\quad (x = n^\alpha y)$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\,(n^\alpha+x)^2} = \int_0^{1/n^\alpha} \frac{n^\alpha dy}{n^{\frac{\alpha}{4}}\sqrt[4]{y}\; n^{2\alpha}(1+y)^2} =$$

$$\frac{1}{n^{\frac{5\alpha}{4}}} \int_0^{\frac{1}{n^\alpha}} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}\,(1+y)^2}.$$ Valutiamo l'integrale

$$\int_0^{\frac{1}{n^{2}}} \frac{dy}{\sqrt[4]{y}\,(1+y)^2} \simeq \int_0^{\frac{1}{n^{2}}} \frac{1}{y^{1/4}}\, dy = \left[\frac{4}{3}\, y^{\frac{3}{4}} \right]_0^{1/n^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{n^{\frac{3}{4}\alpha}}$$

Dunque $\|f_n\|_1 \simeq \frac{4}{3} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ che dà origine a una serie conv. per $2\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{1}{2}$.

Con un ragionamento analogo a quello fatto alla fine del punto 1 — anche il fatto che le f_n sono ≥ 0 — si vede che $\boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$ è necessario e suff. per la conv. della serie.

(b.2) $\begin{cases} y'' - y = e^{-|x|} \\ y \in L^2 \end{cases}$ Trasformo con Fourier:

$$(-\omega^2 - 1)\, \hat{y}(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2} \iff \hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega-i)^2(\omega+i)^2}$$

(due poli doppi) — Calcoliamo i residui:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{-2e^{izt}}{(z-i)^2(z+i)^2}, i \right) = \frac{d}{dz} \frac{-2e^{izt}}{(z+i)^2} \Big|_{z=i} =$$

$$\frac{-2ite^{izt}(z+i)^2 + 2e^{izt} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} =$$

$$\frac{-2ite^{-t}(2i)^2 + 4(2i)e^{-t}}{(2i)^4} = \boxed{\frac{(t+1)}{2}\, i\, e^{-t}}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{-2e^{izt}}{(z-i)^2(z+i)^2}, -i \right) = \frac{d}{dz} \frac{-2e^{izt}}{(z-i)^2} \Big|_{z=-i} =$$

$$\frac{-2ite^{izt}(z-i)^2 + 2e^{izt} \cdot 2(z-i)}{(z-i)^4} \Big|_{z=-i} =$$

$$\frac{-2ite^{t}(-2i)^2 + 4(-2i)e^{t}}{(-2i)^4} = \boxed{\frac{(t-1)}{2}\, i\, e^{t}}$$

e quindi — per le formule note:

$$y(t) = \begin{cases} -\dfrac{t+1}{2}\, e^{-t} & \text{se } t>0 \\ \dfrac{t-1}{2}\, e^{t} & \text{se } t>0 \end{cases} = \boxed{-\frac{|t|+1}{2}\, e^{-|t|}}$$

(c.1) $\begin{cases} y'' + 2y' + 17y = \delta \\ y = 0 \quad \text{su }]-\infty, 0[\end{cases}$ Usiamo Laplace

$$(z^2 + 2z + 17)\, \check{y}(z) = 1 \iff \check{y}(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 17}$$

Dato che $z^2 + 2z + 17 = 0 \iff z = -1 \pm 4i$, si ha:

$$y(t) = 2\,\mathrm{Re}\left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+17}, -1+4i \right) \right\} =$$

$$2\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{zt}}{2z+2} \Bigg|_{z=-1+4i} \right\} = \mathrm{Re}\left\{ \frac{e^{(-1+4i)t}}{-1+4i+1} \right\} =$$

$$\frac{e^{-t}}{4}\, \mathrm{Re}\left(\frac{e^{4it}}{i} \right) = e^{-t} \sin(4t) \qquad \underline{\text{per } t>0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{H(t)}{4}\, e^{-t} \sin(4t)}$$

Calcoliamo un po' di derivate:

$$y'(t) = \frac{\delta}{4} \cdot e^{-t} \sin(4t) + \frac{H(t)}{4}\left(-e^{-t}\sin(4t)\right) + \frac{H(t)}{4} e^{-t}\, 4\cos(4t)$$

$$= \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(4\cos(4t) - \sin(4t)\right)$$

$$y''(t) = \frac{\delta}{4} \cdot e^{-t}\left(4\cos(4t) - \sin(4t)\right) + \frac{H(t)}{4}\left(-e^{-t}\right)\left(4\cos(4t) - \sin(4t)\right) + \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(-16\sin(4t) - 4\cos(4t)\right) =$$

$$\delta + \frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(-8\cos(4t) - 15\sin(4t)\right)$$

$$y'''(t) = \delta' + \frac{\delta}{4} e^{-t}\left(-8\cos(4t) - 15\sin(4t)\right) +$$

$$\frac{H(t)}{4} e^{-t} \left(8\cos(4t) + 15\sin(4t) + 32\sin(4t) - 60\cos(4t)\right)$$

$$= \delta' - 2\delta + \frac{H(t)}{4}\left(-52\cos(4t) + 47\sin(4t)\right)e^{-t}$$

$$y^{IV}(t) = \delta'' - 2\delta' - \frac{52}{4}\delta + \frac{H(t)}{4}e^{-t}\Big(52\cos(4t)$$

$$-47\sin(4t) + 204\sin(4t) + 188\cos(4t)\Big) =$$

$$\delta'' - 2\delta' - 13\delta + \frac{H(t)}{4}e^{-t}\left(240\cos(4t) + 157\sin(4t)\right)$$

(c.2)
$$\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = \delta \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$
Trasformo con Fourier

$$P(i\omega)\,\hat{y}(\omega) = 1 \qquad \text{dove } P(i\omega) = -i(\omega - i)(\omega - 1)(\omega + 1)$$

$$\Rightarrow \hat{y}(\omega) = \frac{i}{(\omega - i)(\omega + 1)(\omega - 1)} + \lambda\delta_1 + \mu\delta_{-1}$$

(per $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$)

$$= -\frac{i}{2}\frac{1}{\omega - i} + \frac{i+1}{4}\frac{1}{\omega + 1} + \frac{i-1}{4}\frac{1}{\omega - 1} + \lambda\delta_1 + \mu\delta_{-1}$$

Dato che $\mathcal{F}\left(e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{sgn}(t)\right) = \dfrac{-2i}{\omega - \omega_0}$

(pag. 174 delle dispense) si ha che

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{\omega - \omega_0}\right) = \frac{i}{2}e^{i\omega_0 t}\,\mathrm{sgn}(t) \quad \text{e quindi}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+i}{4}\frac{1}{\omega + 1}\right) = \frac{-1+i}{8}e^{-it}\,\mathrm{sgn}(t) \qquad \text{e}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-i}{4}\frac{1}{\omega - 1}\right) = \frac{-1-i}{8}e^{it}\,\mathrm{sgn}(t) \qquad \text{la cui somma}$$

$$\text{fa} \quad 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-1-i}{8}e^{it}\right)\mathrm{sgn}(t) = \frac{\sin(t) - \cos(t)}{4}\,\mathrm{sgn}(t)$$

Invece per antitrasformare $-\frac{i}{2}\frac{1}{\omega-i}$ si usano

i residui:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{i}{2}\frac{1}{\omega-i}\right) = i \operatorname{Res}\left(\frac{-i\, e^{itz}}{2(z-i)}, i\right) = \frac{1}{2} e^{itz}\Big|_{z=i} =$$

$\frac{1}{2} e^{-t}$ se $t>0$, mentre viene zero per $t<0$

e dunque

$$\mathcal{F}^{-1}\left(-\frac{i}{2}\frac{1}{\omega-i}\right)(t) = \frac{H(t)}{2} e^{-t}.$$ In definitiva:

$$y(t) = \frac{H(t)}{2} e^{-t} + \frac{\sin(t)-\cos(t)}{4}\operatorname{sgn}(t) + \lambda \cos(t) + \mu \cos(t)$$

λ, μ costanti arbitrarie