(a.1) $f_n(x) = \dfrac{n^\alpha x^2}{n^3 + x^3}$

- Vediamo il limite puntuale delle f_n.

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 3 \\ x^2 & \text{se } \alpha = 3 \\ +\infty \ (0) & \text{se } \alpha > 3 \quad x \neq 0 \ (x = 0) \end{cases}$$

Da questo si deduce che la convergenza uniforme si può avere <u>solo per $\alpha < 3$</u>. Infatti la conv. unif. implica quella puntuale per cui non può realizzarsi né per $\alpha > 3$ ($f_n(x) \to +\infty$ sulle $x>0$) e nemmeno per $\alpha = 3$; in questo ultimo caso dovrebbe essere $f_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} x^2$ che non è possibile - infatti se $f_n \xrightarrow{\text{UNIF}} f$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$, mentre x^2 non tende a zero per $x \to +\infty$

- Dunque la conv. unif. delle f_n equivale alla conv. unif. delle f_n <u>alla funzione nulla</u>, cioè a

$$\|f_n\|_\infty \to 0 .$$

Calcoliamo $\|f_n\|_\infty$. Per questo studiamo il grafico di f_n.

$f_n(0) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$

$$f_n'(x) = n^\alpha \frac{2x(n^3+x^3) - x^2 \cdot 3x^2}{(n^3+x^3)^2} = \frac{n^\alpha}{(n^3+x^3)^2}\left(2xn^3 - x^4\right)$$

da cui $f_n'(x) = 0 \iff x = 0$ oppure $x = \sqrt[3]{2}\, n$. Dato che

$$f_n(\sqrt[3]{2}\, n) = \frac{n^\alpha \sqrt[3]{4}\, n^2}{n^3 + 2n^3} = \frac{n^{\alpha+2}}{n^3} \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = n^{\alpha-1} \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = \|f_n\|_\infty$$

Se ne deduce che f_n conv. unif se e solo se $\boxed{\alpha < 1}$

- Vediamo la conv. totale su $[0, +\infty[$.

Questa corrisponde alla convergenza della serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \quad \text{cioè se} \quad \alpha-1<-1 \iff \boxed{\alpha<0}$$

· Per la conv. unif. della serie su $[0,1]$ notiamo che

$$\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \max_{0\leq x\leq 1} |f_n(x)| = f_n(1) = \frac{n^\alpha}{1+n^3}.$$

Se $\alpha=1$ si ottiene $\|f_n\|_{\infty,[0,1]} = \dfrac{n}{1+n^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,1]} < +\infty$ $\left(\text{perché } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty\right)$

$\Rightarrow$ serie conv. totalmente $\Rightarrow$ $\boxed{\text{la serie converge}}$

· Per rispondere all'ultimo quesito mostriamo che la serie <u>non conv. unif. su $\mathbb{R}$</u> <u>quando $\alpha \geq 0$</u>. È facile vedere che basta dimostrarlo per $\alpha=0$ ($\alpha>0$ è "peggio")

Prendiamo $\alpha = 0$: Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \overset{\text{UNIF.}}{=} S(x)$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0 .$$ Però dato $x > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \geq \sum_{n=1}^{[x]} \frac{x^2}{n^3+x^3} \geq \sum_{n=1}^{[x]} \frac{x^2}{x^3+x^3} = \frac{x^2}{2x^3}[x] \geq \frac{x-1}{2x}$$

Allora $\lim_{x\to+\infty} S(x) \geq \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x} = 1/2 > 0$ e quindi non più

converge unif. <u>NOTA</u> il suggerimento non serviva (SORRY!!)

(b.2) Calcoliamo $\|f_n\|_1 = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

$$\int_0^1 \frac{n^2 x^2}{n^3+x^3}\,dx .$$ Poniamo $x = ny$, allora si pone e

$$\int_0^{1/n} \frac{n^2 n^2 y^2}{n^3+n^3y^3}\, n\,dy = n^2 \int_0^{1/n} \frac{y^2}{1+y^3}\,dy$$

[Noto che $\frac{y^2}{2} \leq \frac{y^2}{1+y^3} \leq y^2$ se $0 \leq y \leq 1$ e quindi l'int. è compreso tra $\frac{1}{6n^3}$ e $\frac{1}{3n^3}$]

Possiamo comunque calcolare l'integrale. [Anche in questo caso il suggerimento era fuorviante. NE TERRÒ CONTO NELLA CORREZIONE]

$$\int \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = \frac{1}{3}\int \frac{3y^2}{1+y^3}\,dy = \frac{1}{3}\ln\left(1+y^3\right) = \ln\left(\sqrt[3]{1+y^3}\right) \simeq \frac{y^3}{3}$$

e allora $\|f_n\|_{1,[0,1]} = n^{\alpha}\ln\left(\sqrt[3]{1+n^{-3}}\right) \simeq n^{\alpha}\frac{n^{-3}}{3} = \frac{n^{\alpha-3}}{3}$

Per la convergenza della serie $\sum n^{\alpha-3}$ deve essere $\alpha-3<-1 \iff \alpha<2$

Dunque per $\boxed{\alpha<2}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{1,[0,1]} < +\infty$ e quindi

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge in $L^1([0,1])$.

D'altra parte vediamo che per $\alpha \geq 2$ tale serie non converge in $L^1([0,1])$. Infatti se convergesse si avrebbe (NOTA CHE $|f_n| = f_n$!!)

$$+\infty > \int_0^1 \sum_1^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_1^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \sum_1^{\infty} n^{\alpha}\ln\left(\sqrt[3]{1+n^{-3}}\right) = +\infty$$

ASSURDO.

- Se invece calcoliamo $\|f_n\|_{1,[0,+\infty[}$, usando i calcoli sopra, dovremmo

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = n^{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{1+y^3}\,dy = +\infty \quad \left(\frac{y^2}{1+y^3} \simeq \frac{1}{y} \;!!\right)$$

Dunque $f_n \notin L^1([0,+\infty[)$ qualunque α io prendo e tanto meno può essere convergente la serie in $L^1([0,+\infty[)$

- Per l'ultima domanda calcoliamo $\|f_n\|_{2,[0,+\infty[}$

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{n^\alpha x^2}{n^3+x^3}\right)^2 dx \underset{x=ny}{=} \int_0^{+\infty}\frac{n^{2\alpha}\, n^4 y^4}{n^6(1+y^3)^2}\, n\, dy = n^{2\alpha-1}\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{(1+y^3)^2}dy$$

e stavolta $\int_0^{+\infty}\frac{y^4}{(1+y^3)^2}dy<+\infty$ perché l'integrando $\simeq \frac{y^4}{y^6} = \frac{1}{y^2}$

Allora $\|f_n\|_{2,[0,+\infty[} = c\cdot n^{\alpha-\frac{1}{2}}$ da cui

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_{2,[0,+\infty[} = c\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\frac{1}{2}} < +\infty \quad \text{se} \quad \alpha-\frac{1}{2}<-1 \iff \alpha<-\frac{1}{2}$$

Dato che $-1<-\frac{1}{2}$ la serie converge "assolutamente" in $L^2([0,+\infty))$ e quindi converge in $L^2([0,+\infty[)$ (per $\alpha=-1$)

(e.2) $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^4+4x^2+4)}\,dx = (1)$$

Calcoliamo $$(\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^4+4x^2+4)}\,dx = (\text{v.p.})\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+2)^2}\,dx = (2)$$

Il denominatore ha tre radici che sono 0 (semplice, reale) e $\pm\sqrt{2}i$ (doppie, non reali). Per i risultati sui residui:

$$(2) = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), \sqrt{2}i) + \pi i \operatorname{Res}(f(z), 0) \qquad \left(f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+2)^2}\right)$$

Si ha

- $$\operatorname{Res}(f, 0) = \left.\frac{e^{iz}}{(z^2+2)^2}\right|_{z=0} = \frac{1}{4}$$

- $$\operatorname{Res}(f, \sqrt{2}i) = \left.\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{z(z+\sqrt{2}i)^2}\right|_{z=\sqrt{2}i} = \left[\frac{i e^{iz}}{z(z+\sqrt{2}i)^2} - \frac{e^{iz}}{z^2(z+\sqrt{2}i)^2}\right.$$

$$- 2 \frac{e^{iz}}{z(z+\sqrt{2}i)^3}\Big]_{z=\sqrt{2}i} = \frac{i e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}i\,(2\sqrt{2}i)^2} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{(-\sqrt{2}i)^2(2\sqrt{2}i)^2} - \frac{2e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}i\,(2\sqrt{2}i)^3} =$$

$$e^{-\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}(-8)} - \frac{1}{(-2)(-8)} - \frac{2}{\sqrt{2}i\,(-i)16\sqrt{2}}\right) = -\frac{e^{-\sqrt{2}}}{16}(\sqrt{2}+2)$$

Dunque $\quad (2) = \pi i\left(\frac{1}{4} - \frac{e^{-\sqrt{2}}}{8}(\sqrt{2}+2)\right) \quad$ da cui

$$(1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,((1)) = \boxed{\frac{\pi}{8}\left(1 - e^{-\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}+2}{2}\right)\right)}$$

(b.1)

$$y'' - 4y = e^{-|t|} \qquad y \in L^2(\mathbb{R})$$

Usiamo la trasformata di Fourier $\mathcal{F}(y) = \hat{y}$. Dato che $\mathcal{F}(e^{-|t|}) = \dfrac{2}{\omega^2+1}$

$$(-\omega^2 - 4)\,\hat{y}(\omega) = \frac{2}{\omega^2+1} \iff \hat{y}(\omega) = \frac{-2}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$$

Il denominatore ha quattro radici semplici $\pm i \quad \pm 2i$. Posto $f(\omega) = \dfrac{-2e^{i\omega t}}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$, ricaviamo

$$y(t) = \begin{cases} i \operatorname{Res}(f, i) + i \operatorname{Res}(f, 2i) & \text{per } t>0 \\ -i \operatorname{Res}(f,-i) - i \operatorname{Res}(f,-2i) & \text{per } t<0 \end{cases}$$

Usiamo la formula che dà i residui nei poli semplici:

- $$\operatorname{Res}(f, i) = \left.\frac{-2 e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+1) + 2\omega(\omega^2+4)}\right|_{\omega=i} = \frac{-2e^{-t}}{2i(-1+4)} = \frac{-e^{-t}}{3i}$$
- $$\operatorname{Res}(f, 2i) = \left.\frac{-2 e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+1) + 2\omega(\omega^2+4)}\right|_{\omega=2i} = \frac{-2e^{-2t}}{2\,2i(-4+1)} = \frac{e^{-2t}}{6i}$$
- $$\operatorname{Res}(f, -i) = \left.\frac{-2 e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+1) + 2\omega(\omega^2+4)}\right|_{\omega=-i} = \frac{-2e^{t}}{(-2i)(-1+4)} = \frac{e^{-t}}{3i}$$
- $$\operatorname{Res}(f, -2i) = \left.\frac{-2 e^{i\omega t}}{2\omega(\omega^2+1) + 2\omega(\omega^2+4)}\right|_{\omega=-2i} = \frac{-2e^{2t}}{2(-2i)(-4+1)} = \frac{-e^{-2t}}{6i}$$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(e^{-2t} - 2e^{-t}\right) & t>0 \\ \frac{1}{6}\left(e^{2t} - 2e^{t}\right) & t<0 \end{cases} = \frac{1}{6}\left(e^{-2|t|} - 2e^{-|t|}\right)$$

(c.1) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = H(t)\, e^{t} \\ y(t) = 0 \quad x \quad t<0 \end{cases}$

Applichiamo la trasf. di Laplace: $\mathcal{L}(y) = \check{y}(z)$, $\mathcal{L}(H(t) e^{t}) = \dfrac{1}{z-1}$

$$\check{y}(z)\,(z^2 - 2z + 1) = \frac{1}{z-1} \iff \check{y}(z) = \frac{1}{(z^2-2z+1)}\,\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)^3}$$

Allora $y(t) = 0$ x $t<0$ mentre x $t \geq 0$

$$y(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{(z-1)^3}, 1\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz}\, e^{zt}\Big|_{z=1} =$$

$$\frac{t^2}{2}\, e^{zt}\Big|_{z=1} = \frac{t^2}{2}\, e^{t}$$

cioè $y(t) = H(t)\,\dfrac{t^2}{2}\, e^{t}$. Deriviamo quattro volte

$$y'(t) = \underbrace{\delta(t)\,\frac{t^2}{2} e^{t}}_{=0} + H(t)\, t\, e^{t} + H(t)\,\frac{t^2}{2} e^{t} = H(t) e^{t}\left(\frac{t^2}{2} + t\right)$$

$$y''(t) = \underbrace{\delta(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right)}_{=0} + H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right) + H(t)\, e^{t}(1+t) =$$

$$= H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)$$

$$y'''(t) = \underbrace{\delta(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+2t+1\right)}_{=\delta(t)} + H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+2t+1\right) + H(t)\, e^{t}(t+2) =$$

$$\delta(t) + H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2} + 3t + 3\right)$$

$$y^{IV}(t) = \delta'(t) + \underbrace{\delta(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+3t+3\right)}_{3\delta(t)} + H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2}+3t+3\right) + H(t)\, e^{t}(t+3) =$$

$$\delta'(t) + 3\delta(t) + H(t)\, e^{t}\left(\frac{t^2}{2} + 4t + 6\right)$$

(c.3)

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \delta' \\ y \in \mathcal{S}' \end{cases}$$

Applichiamo Fourier: $\mathcal{F}(y) = \hat{y}(\omega)$; $\mathcal{F}(\delta') = i\omega \Rightarrow$

$$(-\omega^2 - 2i\omega + 1)\,\hat{y}(\omega) = i\omega$$

Dato che $-\omega^2 - 2i\omega + 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = -i$ (radice doppia, non reale)

possiamo ricavare

$$\hat{y}(\omega) = \frac{i\omega}{-\omega^2 - 2i\omega + 1} = \frac{-i\omega}{(\omega+i)^2} \qquad (\in L^2(\mathbb{R}))$$

da cui

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t > 0 \\ -i\,\mathrm{Res}\left(\dfrac{-i\omega e^{i\omega t}}{(\omega+i)^2}, -i\right) & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Applicando la formula sul calcolo dei residui, per $t<0$, si ha:

$$y(t) = (-i)^2 \frac{d}{d\omega}\left(\omega e^{i\omega t}\right)\Big|_{\omega=-i} = -\left(e^{i\omega t} + it\omega e^{i\omega t}\right)\Big|_{\omega=-i} =$$

$-\left(e^{t} + t\, e^{t}\right).$ Si può allora scrivere

$$\boxed{y(t) = -H(-t)\, e^{t}\,(t+1)}$$

. Verifichiamo l'equazione (*)

$$y'(t) = \delta(t)\, e^{t}(t+1) - H(-t)\, e^{t}(t+1) - H(-t)\, e^{t} = \underline{\delta(t) - H(-t)\, e^{t}(t+2)}$$

$$y''(t) = \delta'(t) + \delta(t)\, e^{t}(t+2) - H(-t)\, e^{t}(t+2) - H(-t)\, e^{t} =$$

$$\underline{\delta'(t) + 2\delta(t) - H(-t)\, e^{t}(t+3)}$$

$$y'' - 2y' + y = \delta' + \cancel{2\delta} - H(-t)e^{t}(t+3) - \cancel{2\delta} + H(-t)\, e^{t}(2t+4) - H(-t)e^{t}(t+1)$$

$$= \delta' - H(t)\, e^{t}\left(t + 3 - 2t - 4 + t + 1\right) = \delta'$$

(*) ricordando che $H(-t)' = -\delta$ e che $\delta\, \varphi(t) = \delta\, \varphi(0)$.