Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 3 giugno 2003 -A-

Cognome ______________________ Nome ______________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{1+x^7}+3\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

  $\min_{[0,1]} f =$ ______________ , $\max_{[0,1]} f =$ ______________

- Data f definita da $f(x) = \ln(1+x)+2x+2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(2) =$ ______________
- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{3x}+1}}{e^{3x}}\,dx = \text{______________}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\alpha}{n}} - 1 + \frac{4}{n} \right)$$

  : α ______________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^2 \sin(x) + n^\alpha}{n^2 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

  a_nè limitata per ______________

  $a_n$ha limite per ______________

- Si calcoli (5p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+6x}\ln(1+x) - 2x - 5x^2}{x^3} = \text{______________}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 2x$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

  $z =$ ______________ (1,5 p.)

  Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (1,5 p.):

  $(x_1, y_1) =$ ________ , $(x_2, y_3) =$ ________ , $(x_3, y_3) =$ ________ , $(x_4, y_4) =$ ________ ,

  Si dica se (2 p.)

  f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}y - x^2 + 1 \quad , \quad y(0) = y_0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha:

almeno una soluzione____________________, almeno due soluzioni____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 3 giugno 2003 -B-

Cognome ______________________ Nome ______________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{1+x^7}+4\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

  $\min_{[0,1]} f =$ ______________ , $\max_{[0,1]} f =$ ______________

- Data f definita da $f(x) = \ln(1+x)+4x+2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(2) =$ ______________

- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{4x}+1}}{e^{4x}}\,dx = \text{______________}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\alpha}{n}} - 1 + \frac{9}{n} \right)$$

  : α ______________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^2\sin(x)+n^\alpha}{n^2-n+1}$ si ha (1,5+1,5p:):

  a_nè limitata per ______________

  $a_n$ha limite per ______________

- Si calcoli (5p.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+3x}\,\ln(1+x)-2x-2x^2}{x^3} = \text{______________}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^2+2y^2-4x$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

  $z =$ ______________ (1,5 p.)

  Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (1,5 p.):

  $(x_1,y_1) =$ __________ , $(x_2,y_3) =$ __________ , $(x_3,y_3) =$ __________ , $(x_4,y_4) =$ __________ ,

  Si dica se (2 p.)

  f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

$$y' = \frac{2x}{x^2+1}y - x^2 + 1 \quad , \quad y(0) = y_0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \end{cases}, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \\ \underline{\hspace{3cm}} & \text{se } y_0\underline{\hspace{3cm}} \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha:

almeno una soluzione____________________ , almeno due soluzioni____________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 3 giugno 2003 -C-

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{1+x^7} + 2\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

  $$\min_{[0,1]} f = \underline{\qquad\qquad\qquad} \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Data f definita da $f(x) = \ln(1+x)+5x+2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(2) =$ ____________________

- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

  $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{2x}+1}}{e^{2x}}\, dx = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\alpha}{n}} - 1 + \frac{16}{n} \right)$$

  : α ____________________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^2 \sin(x) + n^\alpha}{n^2 - n + 1}$ si ha (1,5+1,5p:):

  a_nè limitata per ______________________________

  $a_n$ha limite per ______________________________

- Si calcoli (5p.)

  $$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+4x}\ln(1+x) - 2x - 3x^2}{x^3} = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 5x$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

  $z =$ ______________________________ (1,5 p.)

  Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (1,5 p.):

  $(x_1, y_1) =$ __________ , $(x_2, y_3) =$ __________ , $(x_3, y_3) =$ __________ , $(x_4, y_4) =$ __________ ,

  Si dica se (2 p.)

  f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

  $$y' = \frac{2x}{x^2+1} y - x^2 + 1 \quad , \quad y(0) = y_0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha:

almeno una soluzione______________________, almeno due soluzioni______________________

Analisi Matematica I - Ing. Aerospaziale/Sicurezza - Compito del 3 giugno 2003 -D-

Cognome ______________________________ Nome ______________________________

- Si consideri la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{1+x^7}+5\arctan(x)$. Allora (1,5+1,5p.):

  $$\min_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad , \quad \max_{[0,1]} f = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Data f definita da $f(x) = \ln(1+x)+3x+2$ si ha (3p.): $(f^{-1})'(2) =$ ____________________

- Si calcoli l'integrale improprio (5p.):

  $$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{e^{5x}+1}}{e^{5x}}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Si dica per quali valori del parametro reale α converge la seguente serie (3p.):

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{n+\alpha}{n}} - 1 + \frac{25}{n} \right)$$

  : α ____________________.

- Data la successione $a_n = \dfrac{n^2\sin(x)+n^\alpha}{n^2-n+1}$ si ha (1,5+1,5p:):

  a_nè limitata per ______________________________

  $a_n$ha limite per ______________________________

- Si calcoli (5p.)

  $$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+5x}\ln(1+x)-2x-4x^2}{x^3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- Sia data la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^2+2y^2-3x$. Si scriva l'equazione del piano tangente nel punto $(1,1)$ (per motivi di spazio scriviamo i vettori come righe):

  $z =$ ______________________________ (1,5 p.)

  Si trovino tutti i punti critici di f (non sono più di quattro!) (1,5 p.):

  $(x_1,y_1) =$ __________ , $(x_2,y_3) =$ __________ , $(x_3,y_3) =$ __________ , $(x_4,y_4) =$ __________ ,

  Si dica se (2 p.)

  f ha minimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$ $\quad$ f ha massimo in $\mathbf{R}^2$ $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

- Si consideri l'equazione differenziale (questo esercizio vale 8 p. in tutto)

  $$y' = \frac{2x}{x^2+1}y - x^2 + 1 \quad , \quad y(0) = y_0$$

· Si scriva la soluzione:

$y(x) =$ ____

· Si trovino (eventualmente al variare di y_0 - non ci sono più di tre casi!)

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}, \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ & \text{se } y_0 \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

· Si disegnino i grafici delle soluzioni, al variare del dato iniziale y_0, cercando di dare l'idea del comportamento delle soluzioni. Per questo e' opportuno tracciare i grafici per i valori più "significativi" di y_0 (indicando tali valori)

· Si dica per quali valori del punto iniziale y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha:

almeno una soluzione____________________ , almeno due soluzioni____________________