Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 17 febbraio 2010.
FILA A

1. Sia data la successione $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n - 1}$ (definita per $n \geq 2$). Allora (1/-1 p. a domanda)

   (a) $\{a_n\}$ è limitata; (b) $\{a_n\}$ ammette limite;
   (c) $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente; (d) $\{a_n\}$ è monotona;

2. Sia data la funzione $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$: Allora il massimo di f su $[-5, 5]$ vale (2/-0.5 p.):

   $$(a)\quad 0 \qquad (b)\quad \pm 5 \qquad (c)\quad 426 \qquad (d)\quad 1 \qquad (e)\quad \pm 4$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1 + n^5 4^n + n^4 5^n} \qquad (b) \quad \lim_{n \to +\infty} n \sqrt[7]{n^7 + 4n^5 + 5} - n^2$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (8 punti)

   $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{\ln(1 + 2x)}{x^2 \sin(2x)} \right)$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := \dfrac{4x + 5}{x^2 - 1}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (6 punti in tutto). Si determini inoltre l'immagine $f(\mathbb{R})$ della funzione (2p.)

   $(\star)$ Si dica infine se esiste un intervallo I in cui f è invertibile e tale che $0 \in f(I)$; in caso affermativo detta f^{-1} la funzione che inverte f sull'intervallo I si determini $(f^{-1})'(0)$ (3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 17 febbraio 2010.
FILA B

1. Sia data la successione $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n - 1}$ (definita per $n \geq 2$). Allora (1/-1 p. a domanda)

   (a) $\{a_n\}$ ammette limite; (b) $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente;
   (c) $\{a_n\}$ è monotona; (d) $\{a_n\}$ è limitata;

2. Sia data la funzione $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$: Allora il massimo di f su $[-5, 5]$ vale (2/-0.5 p.):

   $$(a) \quad \pm 2\sqrt{3} \quad (b) \quad 0 \qquad (c) \quad \pm 5 \qquad (d) \quad 476 \qquad (e) \quad 1$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + n^7 3^n + n^3 7^n} \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} n \sqrt[8]{n^8 + 3n^6 + 7} - n^2$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (8 punti)

   $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(1 - 2x)}{x^2 \sin(2x)} \right)$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := \dfrac{4x + 5}{x^2 - 1}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (6 punti in tutto). Si determini inoltre l'immagine $f(\mathbb{R})$ della funzione (2p.)

   ($\star$) Si dica infine se esiste un intervallo I in cui f è invertibile e tale che $0 \in f(I)$; in caso affermativo detta f^{-1} la funzione che inverte f sull'intervallo I si determini $(f^{-1})'(0)$ (3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 17 febbraio 2010.
FILA C

1. Sia data la successione $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n-1}$ (definita per $n \geq 2$). Allora (1/-1 p. a domanda)

   (a) $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente; (b) $\{a_n\}$ è monotona;
   (c) $\{a_n\}$ è limitata; (d) $\{a_n\}$ ammette limite;

2. Sia data la funzione $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$: Allora il massimo di f su $[-4, 4]$ vale (2/-0.5 p.):

   $$(a) \quad 1 \qquad (b) \quad \pm 2\sqrt{2} \quad (c) \quad 0 \qquad (d) \quad \pm 4 \qquad (e) \quad 193$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno)

   $$(a) \quad \lim_{n\to+\infty} n\sqrt[9]{n^9 + 3n^7 + 4} - n^2 \qquad (b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + n^4 3^n + n^3 4^n}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (8 punti)

   $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{2\ln(1+x)}{x^2 \sin(x)} \right)$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := \dfrac{4x+5}{x^2-1}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (6 punti in tutto). Si determini inoltre l'immagine $f(\mathbb{R})$ della funzione (2p.)

   $(\star)$ Si dica infine se esiste un intervallo I in cui f è invertibile e tale che $0 \in f(I)$; in caso affermativo detta f^{-1} la funzione che inverte f sull'intervallo I si determini $(f^{-1})'(0)$ (3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compitino del 17 febbraio 2010.
FILA D

1. Sia data la successione $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n - 1}$ (definita per $n \geq 2$). Allora (1/-1 p. a domanda)

   (a) $\{a_n\}$ è monotona; (b) $\{a_n\}$ è limitata;
   (c) $\{a_n\}$ ammette limite; (d) $\{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente;

2. Sia data la funzione $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$: Allora il massimo di f su $[-3, 3]$ vale (2/-0.5 p.):

$$(a)\quad 64 \qquad (b)\quad 1 \qquad (c)\quad \pm 2 \quad (d)\quad 0 \qquad (e)\quad \pm 3$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (4 punti ciascuno)

$$(a)\quad \lim_{n\to+\infty} n\sqrt[6]{n^6 + 5n^4 + 7} - n^2 \qquad (b)\quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1 + n^7 5^n + n^5 7^n}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (8 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2 \sin(x)} \right)$$

5. Studiare la funzione f definita da $f(x) := \dfrac{4x + 5}{x^2 - 1}$, determinando in particolare il dominio naturale, i limiti nei punti di accumulazione per il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, i punti di massimo e minimo relativi e assoluti e si tracci infine un grafico qualitativo di f che esprima le informazioni precedentemente trovate (6 punti in tutto). Si determini inoltre l'immagine $f(\mathbb{R})$ della funzione (2p.)

   ($\star$) Si dica infine se esiste un intervallo I in cui f è invertibile e tale che $0 \in f(I)$; in caso affermativo detta f^{-1} la funzione che inverte f sull'intervallo I si determini $(f^{-1})'(0)$ (3 punti).

TEMPO DISPONIBILE: **UN'ORA E MEZZA**
DURANTE IL COMPITO NON È CONSENTITO USCIRE.
DEVE ESSERE CONSEGNATO **SOLO IL FOGLIO RISPOSTE** (insieme ai due fogli spillati - il testo si può tenere)

NON SI POSSONO USARE CALCOLATRICI O APPUNTI.
PER GLI ESERCIZI 1-4 **CONTA SOLO LA RISPOSTA**.
GLI ESERCIZI 1 e 2 COMPORTANO PUNTEGGI NEGATIVI (gli altri no). IN CASO DI MANCATA RISPOSTA IL PUNTEGGIO È NULLO
L'ESERCIZIO 5 **VA SVOLTO** NEI FOGLI SPILLATI E LA VALUTAZIONE DIPENDE DALLO SVOLGIMENTO.

PER LA SUFFICIENZA È NECESSARIO RIPORTARE (contemporaneamente):
(a) UN VOTO MAGGIORE O EGUALE A 8 NEGLI ESERCIZI 1-4,
(b) UNA MEDIA COMPLESSIVA MAGGIORE O EGUALE A 15.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 17 FEBBRAIO 2010

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	A

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

2. a | b | ~~c~~ | d | e | nessuna delle precedenti

3. (a) 5 (b) $\frac{4}{7}$

4. -2

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 17 FEBBRAIO 2010

Cognome:

Nome:

Matricola:

Fila del compito: B

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

2. | a | b | c | ~~d~~ | e | nessuna delle precedenti |

3. (a) 7 (b) $3/8$

4. -2

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 17 FEBBRAIO 2010

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	C

1. (a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

2. | a | b | c | d | ~~e~~ | nessuna delle precedenti |

3. (a) $1/3$ (b) 4

4. -1

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

INGEGNERIA AEROSPAZIALE
COMPITINO DI ANALISI I DEL 17 FEBBRAIO 2010

Cognome:	
Nome:	
Matricola:	
Fila del compito:	D

1. (a) ~~SI~~ NO (b) SI ~~NO~~ (c) ~~SI~~ NO (d) SI ~~NO~~

2. ~~a~~ | b | c | d | e | nessuna delle precedenti

3. (a) $5/6$ (b) 9

4. -1

Le facciate libere di questi fogli sono riservate per lo svolgimento dell' esercizio 5.

(1) $a_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n - 1}$. Allora è chiaro che

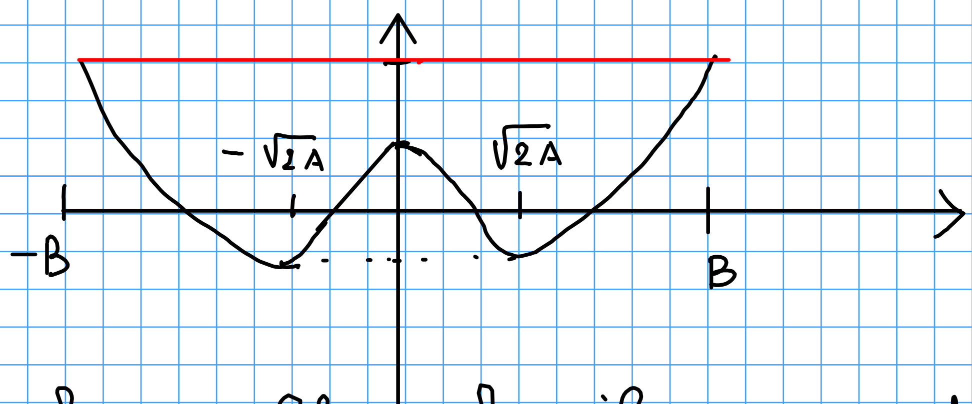
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n \frac{1-1/n+1/n^2}{1+1/n} = +\infty$$

per cui $\{a_n\}$ ammette limite, non è limitata e non può avere sottosuccessioni convergenti. Non è difficile vedere che $\{a_n\}$ è crescente. Per questo si può considerare $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ e notare che:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

è ≥ 0 se $x \geq 2$.

(2) La funzione è della forma $f(x) = x^4 - Ax^2 + 1$. La sua derivata è $f'(x) = 4x^3 - 2Ax = 2x(x^2 - 2A)$ che si annulla in $x=0$ e $x = \pm\sqrt{2A}$. Tale funzione viene considerata su un insieme $[-B, B]$ con $B > 2A$ di modo che il grafico di f risulta



È chiaro allora che il massimo di f su $[-B, B]$ è pari a $f(B) = f(-B) = B^2(B^2 - A) + 1$

(3) Uno dei due limiti coinvolge la successione

$$\sqrt[n]{1 + n^A B^n + n^B A^n} = \otimes \quad \text{con } A < B. \text{ Allora}$$

$$\otimes = \sqrt[n]{B^n}\sqrt[n]{B^{-n} + n^A + n^B (A/B)^n} = B \underbrace{\sqrt[n]{n^A + o(n^A)}}_{\text{tende a uno}} \to B$$

Per il secondo limite si ha:

$$n\sqrt[k]{n^k + An^{k-2} + B} - n^2 = n^2\left(1 + An^{-2} + Bn^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} - n^2 =$$

$$n^2\left(1 + \frac{A}{k}n^{-2} + o(n^{2-k})\right) - n^2 = \frac{A}{k} + o(1) \to \frac{A}{k}$$

(4) Facciamo uno dei limiti proposti (f e D)

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2\ln(1-x)}{x^2\sin(x)} = (*) \quad \text{Usiamo Taylor}$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{\ln(1-x)}{\sin(x)} = \frac{-x - x^2/2 - x^3/3 + o(x^3)}{x - x^3/6 + o(x^3)} =$$

$$\frac{-1 - x/2 - x^2/3 + o(x^2)}{1 - x^2/6 + o(x^2)} = \left((1+y)^{-1} = 1 - y + o(y) \right)$$

$$\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) =$$

$$-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \frac{x^2}{6} + o(x^2) = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

DUNQUE $(*) = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$

$$\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 1 + o(1) \to -1$$

IN MANIERA ANALOGA SI FANNO GLI ALTRI TRE

(5) $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-1}$

- Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

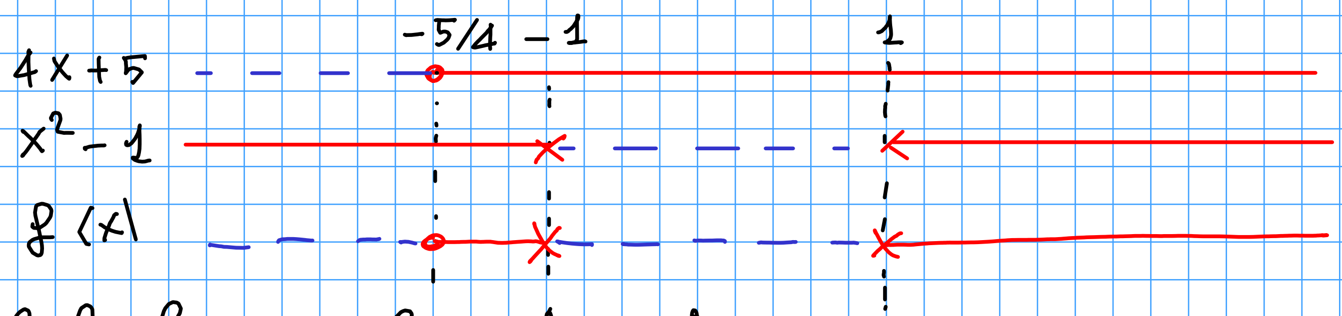
- I limiti da fare sono allora a $\pm\infty$ e a $\pm 1^{+/-}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \left(\frac{\text{Pol. di grado 1}}{\text{Pol. di grado 2}}\right)$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

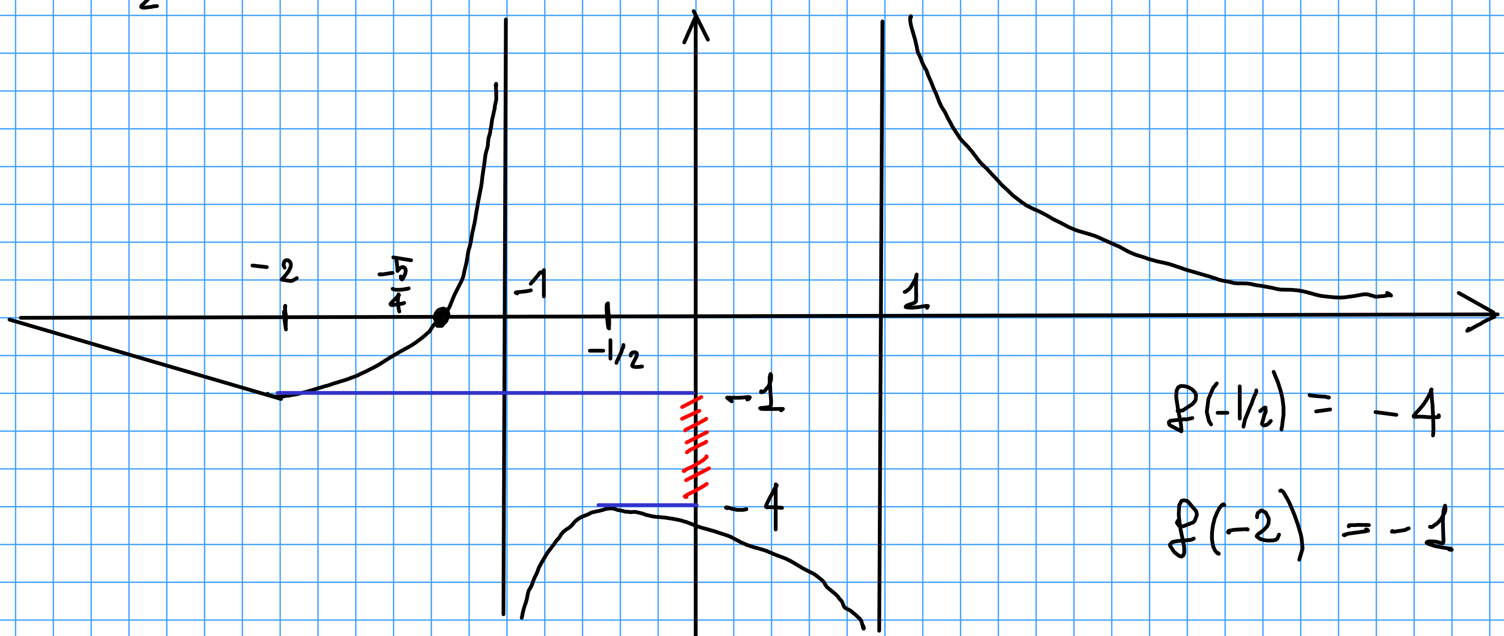
- Il segno di $f(x)$ si stabilisce facilmente guardando i segni di $4x+5$ e x^2-1



- Calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{4(x^2-1)-(4x+5)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{4x^2-4-8x^2-10x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2-10x-4}{(x^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = x_{12} = \begin{cases} -2 \\ -1/2 \end{cases}.$$ Inoltre $f'(x) > 0$ $\iff -\frac{1}{2} < x < -2$. Se ne ricava il seguente grafico



$f(-1/2) = -4$

$f(-2) = -1$

- Si deduce dal grafico che l'immagine di $\mathbb{R}$ tramite f è tutto $\mathbb{R}$ tranne l'intervallo $]-4,-1[$

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \setminus]-4,-1[\; = \;]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$$

- Si capisce di nuovo dal grafico che prendendo $I=[-2,-1[$ la funzione è invertibile su I e $-\frac{5}{4} \in I$, $f(-\frac{5}{4}) = 0$. Inoltre (vedendo) $f(I) = [-1,+\infty[\Rightarrow$ è definita $f^{-1}: [-1,+\infty[\to I$

Per la formula sulla derivata di f^{-1} si ha

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(-\frac{5}{4})} = \left.\frac{(x^2-1)^2}{-4x^2-10x-4}\right|_{x=-\frac{5}{4}} = \frac{9}{64}$$

$$\frac{\left(\frac{25}{16}-1\right)^2}{-4\,\frac{25}{16}+10\cdot\frac{5}{4}-4} = \frac{\left(\frac{9}{16}\right)^2}{\frac{-100+200-64}{16}} = \frac{81}{16}\,\frac{1}{36}$$