Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 15 febbraio 2010

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

allora (1/-1 p.) (a) f è limitata su $\mathbb{R}$; (b) f è derivabile su $\mathbb{R}$; (c) f è derivabile due volte su $\mathbb{R}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{2}$.

2. Se A è l'insieme $\{a \in \mathbb{R} : x^2 + 2x \geq a \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

(a) $A = [0,2]$, (b) $A = [-1,+\infty[$, (c) $A =]-\infty, 0]$, (d) $A =]-\infty, -1]$, (e) $A = [0,\infty[$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + n4^n + n^4} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n! + 2^n)}{n^2}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (6 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e\left(1-x\right)^{\dfrac{1}{\sin(x)}} - 2 + x}{x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y' = 1, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = 0$$

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$, (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, (c) $y'(-1) = 0$, (d) $y(1) = e$.

6. Date le due serie:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{1+3^n}, \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{-n}}{1+n}$$

allora (2/-0.5 p.) convergono (semplicemente):

(a) $\boxed{\text{la (1) e non la (2)}}$, (b) $\boxed{\text{la (2) e non la (1)}}$, (c) $\boxed{\text{sia la (1) che la (2)}}$,
(d) $\boxed{\text{né la (1) né la (2)}}$, (e) $\boxed{\text{la domanda non ha senso per questo tipo di serie}}$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = -\frac{2y}{x+2} - \frac{x^2}{(x+2)^2}, \qquad x > -2, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -2^+$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ ha due radici (2 p.).

Compito di Analisi 1 – Ing. Aerospaziale –

15 febbraio 2010

(1) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che, se $x < 0$ $f(x) = \dfrac{1 - \left(1 - x^2/2 + o(x^2)\right)}{x} = \dfrac{x}{2} + o(x)$

Allora $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ per cui f risulta continua in zero e di conseguenza continua su $\mathbb{R}$. Per Weierstrass f è limitata su ogni intervallo. Dato che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \quad \left(\frac{\text{limitato}}{\text{infinito}}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

si ha che f è limitata.

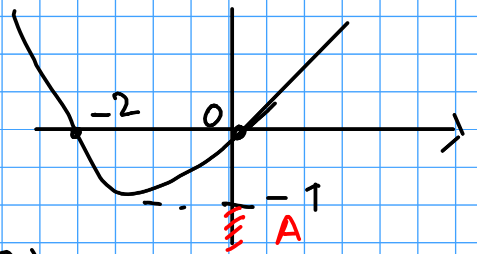
- Se f fosse derivabile, da $f(x) = \dfrac{x}{2} + o(x)$ se $x \to 0^-$ si avrebbe $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, mentre essendo $f(x) = 0$ per $x > 0$ sarebbe $f'(0) = 0$

Dunque f non è derivabile in zero — di conseguenza non può avere (a maggior ragione) derivata seconda in zero

DUNQUE

~~SI~~	NO	SI	~~NO~~	SI	~~NO~~	~~SI~~	NO

(2) A è l'insieme di tutte le costanti a per cui la retta $y=a$ sta sempre sotto la parabola $y=x^2+2x$. Dunque gli a di A sono tutti e soli i numeri ≤ 1, cioè $A =]-\infty,-1]$.



a	b	c	~~d~~	e

(3) (a) $\sqrt[n]{1+n^4+n4^n} = 4\sqrt[n]{\frac{1}{4^n}+\frac{n^4}{4^n}+n} = 4\sqrt[n]{n+o(1)}$

$= 4\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{1+o(1/n)} \to 4\cdot 1\cdot 1 = \boxed{4}$

(b) Si ha $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \to \frac{1}{e}$ (Cesaro – visto a lezione)

Quindi $\sqrt[n]{n!} = \frac{n}{e} + o(n)$ e allora

$$\frac{\ln(1+n!+2^n)}{n^2} = \frac{\ln(n!)}{n^2} + \frac{\ln(1/n!+1+2^n/n!)}{n^2} =$$

$$\frac{\ln(\sqrt[n]{n!})}{n} + o(1) = \frac{\ln\left(\frac{n}{e}+o(n)\right)}{n} + o(1) =$$

$$\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(1/e+o(1))}{n} + o(1) \to \boxed{0}$$

(ricordiamo che $\frac{\ln(n)}{n} \to 0$)

4) Si ha:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies$$

$$\frac{\ln(1-x)}{\sin(x)} = \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} =$$

$$\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^{-1} = \quad \left((1+y)^{-1} = 1 - y + o(y)\right)$$

$$\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2) + o\left(\frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\right) =$$

$$\left(-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - \frac{x^2}{6} + o(x^2) + o(x^2)\right) = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

DUNQUE

$$(1-x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = e^{\frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}} = e^{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = e^{-1} e^{-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$\frac{1}{e}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 + o\left(O(x)^2\right)\right) =$$

$$\frac{1}{e}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$\implies \frac{2e(1-x)^{\frac{1}{\sin(x)}} - 2 + x}{x^2} = \frac{-\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} \longrightarrow \boxed{-\frac{3}{4}}$$

(5) $\quad y'' - y' = 1 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 0$

- Soluzioni dell'omogenea: $y_0(x) = A e^x + B$ (pol. caratt $\Rightarrow P(z) = z^2 - z$)
- Cerco una sol. particolare $\bar{y}(x) = cx \longrightarrow$

$\bar{y}' = c \quad \bar{y}'' = 0 \Rightarrow c = -1$ e allora le sol. dell'eq. sono

$y(x) = A e^x + B - x$. Impongo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - 1 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 1 \end{cases}$$

dunque $y(x) = e^x + 1 - x$. Allora

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$, $y(-1) = e^{-1}$, $y'(1) = e - 1$

~~SI~~	NO	~~SI~~	NO	SI	~~NO~~	~~SI~~	NO

(6) • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{1+3^n}$; studiamo la conv. assoluta, cioè consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}$. Dato che $\frac{2^n}{1+3^n} \simeq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

e che $\frac{2}{3} < 1$ la serie conv. ass. $\Rightarrow$ converge

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{-n}}{1+n}$; studiamo la conv. assoluta cioè possiamo alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{-n}}{1+n}$. Dato che $\frac{3^{-n}}{1+n} \simeq \frac{1}{n 3^n} \leq \frac{1}{3^n}$

e che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ converge (essendo geometrica di ragione <1), allora

la serie conv. $\Rightarrow$ la serie di potenza converge.

$\boxed{a}$ $\boxed{b}$ $\cancel{\boxed{c}}$ $\boxed{d}$ $\boxed{e}$

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x^3+x}\,dx = (*)$ Usiamo la scomposizione in fratti semplici

$$\frac{x+2}{x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + Bx^2 + Cx}{x^3+x} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$(*) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \Big[2\ln(x) - \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg}(x) \Big]_1^{+\infty}$$

$$= \left[\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + \operatorname{arctg}(x) \right]_1^{+\infty} = \boxed{\frac{\pi}{4} + \ln 2}$$

(8) $$y' = -\frac{2y}{x+2} - \frac{x^2}{(x+2)^2} \qquad x > -2, \quad y(0) = y_0$$

(a) Applicando la formula risolutiva:

$$y(x) = \frac{4}{(x+2)^2}\left(y_0 - \int_0^x \frac{(t+2)^2}{4}\frac{t^2}{(t+2)^2}\,dt \right) =$$

$$\frac{1}{(x+2)^2}\left(4y_0 - \int_0^x t^3\,dt \right) = \boxed{\frac{4y_0}{(x+2)^2} - \frac{x^3}{3(x+2)^2}} = \frac{12y_0 - x^3}{3(x+2)^2}$$

(b) $$\lim_{x \to -2} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } y_0 > -\frac{2}{3} \\ -\infty & \text{se } y_0 \leq -\frac{2}{3} \end{cases}$$

N.B. Nel caso $y_0 = -\frac{2}{3}$ viene $-\frac{8 + x^3}{3(x+2)^2} = \frac{-(x+2)(x^2-2x+4)}{3(x+2)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{3(x+2)}$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty \qquad (\forall y_0)$$

(c) Poniamo $F(x,y) = -\frac{2y}{(x+2)} - \frac{x^2}{(x+2)^2}$ di modo che

l'eq. si può scrivere $y' = F(x,y)$.

Si ha (per $x > -2$)

$$F(x,y) = 0 \iff y = -\frac{1}{2}\frac{x^2}{x+2} =: g(x)$$

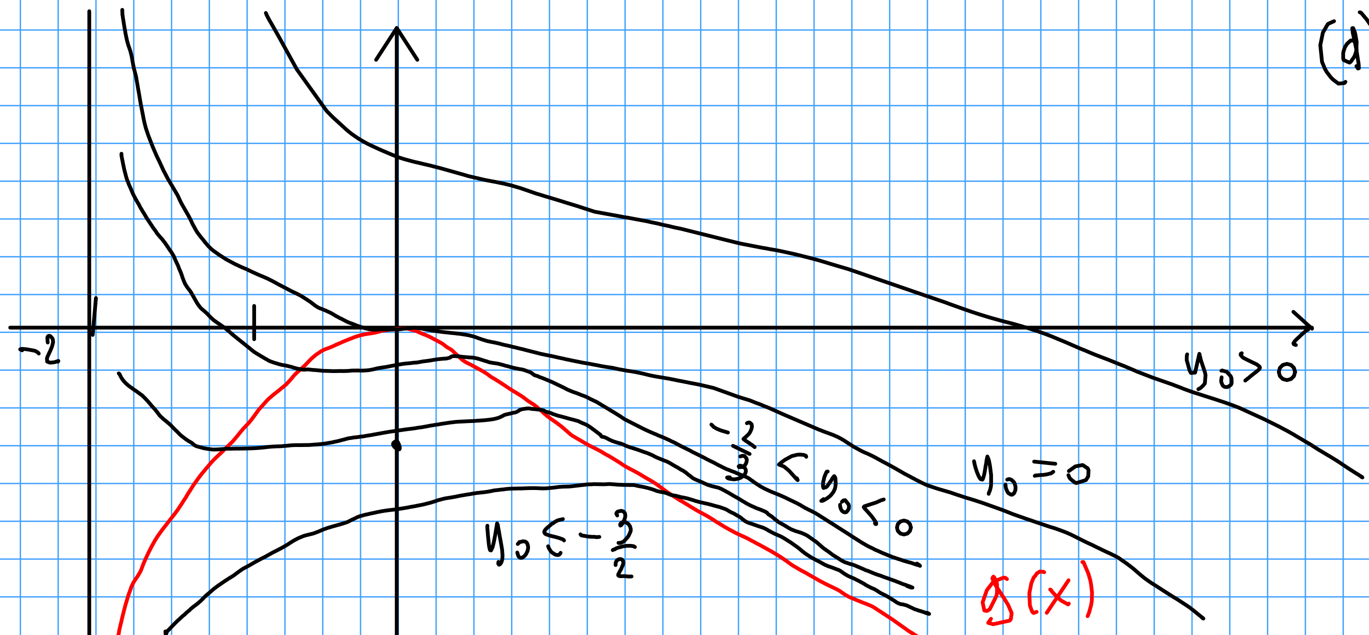
$$F(x,y) > 0 \iff y < g(x) \; ; \; F(x,y) < 0 \iff y > g(x)$$

Studiamo g su $]-2, +\infty[$;

$$\lim_{x \to -2} g(x) = -\infty \; , \; \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \; , \; g(0) = 0$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = -\frac{x(x+4)}{2(x+2)^2}$$

Dunque g cresce tra -2 e 0, decresce se $x \geq 0$. Se ne ricavano i grafici:



(d) Dal grafico a sx si vede che $y(x) = 0$ non ha $\boxed{\text{MAI}}$ due soluzioni