Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 26 gennaio 2010

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

allora (1/-1 p.) (a) f è continua su $\mathbb{R}$; (b) f è derivabile su $\mathbb{R}$; (c) f è derivabile due volte su $\mathbb{R}$; (d) $f'(0) = 1$.

2. Se A è l'insieme $\{y \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq y \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

(a) $\sup A = 1$, (b) $\sup A = -1$, (c) $\sup A = 0$, (d) $\sup A = -\infty$, (e) $\sup A = +\infty$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n! - n^4} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1 + n^2 + 2^n)}{n}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (6 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} - 2e + ex}{x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y = 2e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 3$$

(a) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$, (b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$, (c) $y'(-2) = e^2$, (d) $y(-1) = -e$.

6. Date le due serie:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{1+n^2}, \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{1+n^4}$$

allora (2/-0.5 p.) convergono assolutamente:

(a) $\boxed{\text{la (1) e non la (2)}}$, (b) $\boxed{\text{la (2) e non la (1)}}$, (c) $\boxed{\text{sia la (1) che la (2)}}$,
(d) $\boxed{\text{né la (1) né la (2)}}$, (e) $\boxed{\text{la domanda non ha senso per questo tipo di serie}}$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_1^{+\infty} \frac{10x}{4x^4 + 3x^2 - 1}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = -\frac{y}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2}, \qquad x > -1, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 la soluzione è strettamente crescente (2 p.).

Analisi I - Compito del 26 gennaio 2010

(1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{se } x<0 \\ 1 & \text{se } x\geq 0 \end{cases}$

(a) f è continua dato che $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = \lim_{x\to 0^+} 1$

(b) f è derivabile in zero (e quindi è derivabile). Infatti

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)-x}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+o(x^2)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-1}{x} = 0$$

(c) f non è derivabile due volte in zero. Infatti se $x<0$

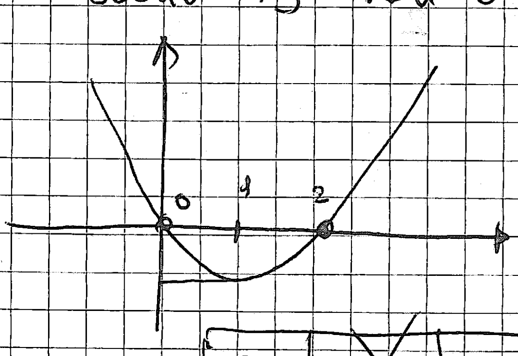
$$f(x) = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \quad \text{da cui}$$

$\lim_{x\to 0^-} f''(x) = -\frac{1}{12}$; Invece $f''(x)=0$ per $x>0$ e quindi $f''(0)$ non esiste

(d) $f'(0) = 1$ per il punto b

(a) ~~SI~~ NO (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) SI ~~NO~~

(2) $A = \{y \in \mathbb{R} : x^2 - 2x \geq y\}$ è l'insieme delle costanti y tali che y è sotto il grafico di $f(x) = x^2 - 2x$



È chiaro allora che $\sup A = \min f(x) = f(1) = -1$

a	~~b~~	c	d	e

(3)

(a) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n! - n^4} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{n!}}_{\text{tende a } \infty} \; \underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{4^n}{n!}-\frac{n^4}{n!}}}_{\text{tende a } 1} = \boxed{+\infty}$$

Il fatto che $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ si vede facilmente con Cesaro

(b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^2+2^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(2^n) + \ln(1+2^{-n}+n^2 2^{-n})}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\ln(2)}{\cancel{n}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^{-n}+n^2 2^{-n})}{n} = \boxed{\ln(2)}$$

(4) $$2(1+x)^{\frac{1}{\sin(x)}} = 2e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}}.$$ Ora

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \implies$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} =$$

$$1 + \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 + \frac{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} =$$

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{\cancel{-\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x}{2}} - \frac{x^3}{6} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Infine $$2e^{\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)}} = 2e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} =$$

$$2e\, e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2)\right) =$$

$$e\left(2 - x + \frac{5}{4}x^2 + o(x^2)\right)$$. Dunque il limite diventa

$$\frac{2e - ex + \frac{5}{4}x^2 + o(x^2) - 2e + ex}{x^2} \to \boxed{\frac{5}{4}e}$$

(5) $y'' - y = 2e^x$

Sol. omogenea: $y(x) = Ae^x + Be^{-x}$

Sol. particolare: $\bar y(x) = cxe^x \Rightarrow$

$\bar y'(x) = cxe^x + ce^x \qquad \bar y''(x) = cxe^x + ce^x + ce^x$

$\bar y'' - y = cxe^x + 2ce^x - cxe^x = 2ce^x \Rightarrow \boxed{c=1}$

e allora $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + xe^x$

$y'(x) = Ae^x - Be^{-x} + e^x + xe^x$

$y(0) = A+B \qquad y'(0) = A - B + 1$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+1=3 \end{cases} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \boxed{e^x - e^{-x} + xe^x}$$

$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$

$y(-1) = e^{-1} - e^{1} - e^{-1} = -e$

$y'(x) = e^x + e^{-x} + xe^x + e^x = 2e^x + e^{-x} + xe^x$

$y'(-2) = 2e^{-2} + e^2 - 2e^{-2} = e^2$

(a) $\boxed{SI}$ $\cancel{\boxed{NO}}$ (b) $\boxed{SI}$ $\cancel{\boxed{NO}}$ (c) $\cancel{\boxed{SI}}$ $\boxed{NO}$ (d) $\cancel{\boxed{SI}}$ $\boxed{NO}$

(6) (1) se $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{1+n^2} \Rightarrow |a_n| = \dfrac{n}{1+n^2} \simeq \dfrac{1}{n} \Rightarrow \sum |a_n| = +\infty$

(2) se $a_n = \dfrac{(-1)^n n^2}{1+n^4} \Rightarrow |a_n| = \dfrac{n^2}{1+n^4} \simeq \dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \sum |a_n| < +\infty$

La (1) non conv. ass., la (2) conv. ass.

$\boxed{a}$ $\cancel{\boxed{b}}$ $\boxed{c}$ $\boxed{d}$ $\boxed{e}$

(7)

(7) $\int_1^{+\infty} \frac{10x}{4x^4+3x^2-1}\,dx = ⊛$

$$4x^4+3x^2-1 = (4x^2-1)(x^2+1) = (2x-1)(2x+1)(x^2+1) \Rightarrow$$

$$\frac{10x}{4x^4+3x^2-1} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+1} + \frac{Cx+D}{\cancel{2x}x^2+1} =$$

$$\frac{A(2x+1)(x^2+1)+B(2x-1)(x^2+1)+Cx(4x^2-1)+D(4x^2-1)}{4x^4+3x^2-1} =$$

$$\frac{A(2x^3+x^2+2x+1)+B(2x^3-x^2+2x-1)+C(4x^3-x)+D(4x^2-1)}{4x^4+3x^2-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2A+2B+4C=0 \\ A-B+4D=0 \\ 2A+2B-C=10 \\ A-B-D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ D=0 \\ A+B+2C=0 \\ 2A+2B-C=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=B \\ D=0 \\ B+C=0 \\ 4B-C=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=2 \\ C=-2 \\ D=0 \end{cases}$$

$$⊛ = \int_1^{+\infty}\left(\frac{2}{2x+1} + \frac{2}{2x-1} - \frac{2x}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2+1}\right]_1^{+\infty} =$$

$$\ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$$

(8) $y'(x) = -\frac{y(x)}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2}$ Allora

(a) $y(x) = \frac{1}{x+1}\left(y(0) + \int_0^x \frac{t^2}{(t+1)^{\cancel{2}}}\cancel{(t+1)}\,dt\right) =$

$$\frac{1}{x+1}\left(y_0 + \int_0^x \frac{t^2}{t+1}\,dt\right) = \frac{1}{x+1}\left(y_0 + \int_0^x \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt\right) =$$

$$\boxed{\frac{1}{x+1}\left(y_0 + \frac{x^2}{2} - x + \ln(1+x)\right)}$$

(b) $\lim_{x\to -1^+} y(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} y(x) = +\infty$

(c) Se scrivo $y' = F(x,y)$ con $F(x,y) = -\frac{y}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)^2}$

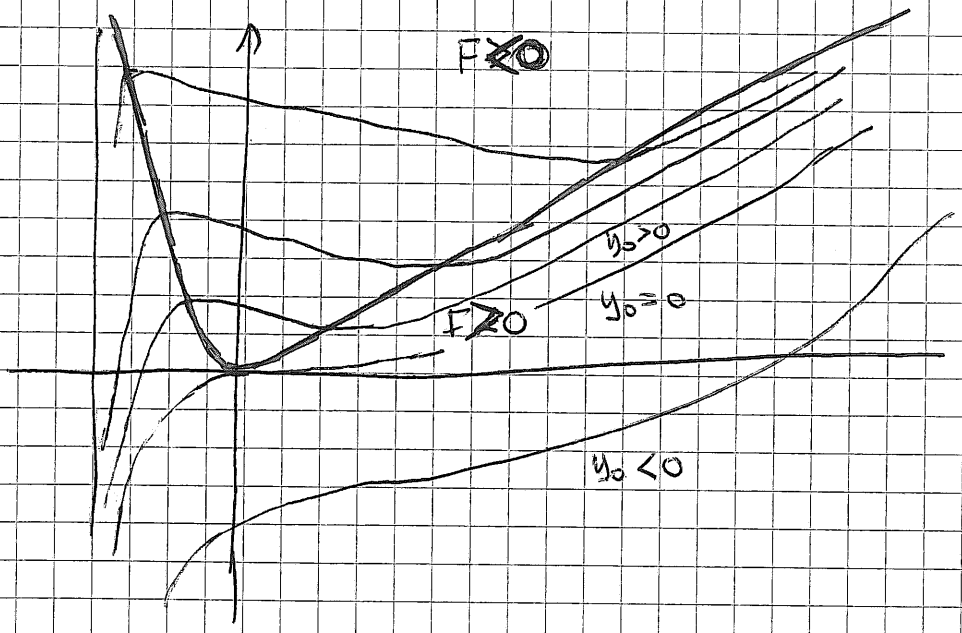
allora $F(x,y)=0 \iff \frac{y}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)^2} \iff y = \frac{x^2}{1+x}$

Pongo $g(x) = \frac{x^2}{1+x}$ per $x > -1$. Allora

$\lim_{x\to -1^-} g(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$ $\quad g(0)=0$

$$g'(x) = \frac{2x(1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2+2x}{(1+x)^2}$$

che si annulla per $x=0$ e $x=-2$ (fuori dall'intervallo di interesse)



(notiamo che $F(x,y) > 0 \iff y < g(x)$)

(d) Dal punto (c) si vede che $y(x)$ è strettamente crescente se e solo se $y_0 \leq 0$