Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 8 gennaio 2010

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{\sin(|x|)}{x-\pi}$ per $x \neq \pi$ e $f(\pi) := -1$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è continua su $\mathbb{R}$; (b) f è derivabile in 0;
   (c) f è derivabile in π; (d) f è pari $\mathbb{R}$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : y^2 + 2y \geq x \quad \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

   (a) $\sup A = -1$, (b) $\sup A = 1$, (c) $\sup A = 0$, (d) $\sup A = +\infty$, (e) $\sup A = -\infty$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^6 2^n} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+6n^4)}{\ln(1+4n^6)}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (6 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + 3y' = e^{-2x}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

(a) $\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$, (b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \dfrac{1}{6}$, (c) $\lim_{x\to-\infty} y'(x) = +\infty$, (d) $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

6. Date le due serie:

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}, \qquad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+3^n}$$

   allora (2/-0.5 p.) convergono assolutamente:

   (a) $\boxed{\text{la (1) e non la (2)}}$, (b) $\boxed{\text{la (2) e non la (1)}}$, (c) $\boxed{\text{sia la (1) che la (2)}}$,
   (d) $\boxed{\text{né la (1) né la (2)}}$, (e) $\boxed{\text{la (1) mentre per la (2) la domanda non ha senso}}$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{2-x}{8+x^3}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$y' = \frac{xy}{3+x^2} + 1 - x, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -\infty$ e per $x \to +\infty$ (1 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (2 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 0$ non ha soluzioni (2 p.).

(1) f è chiaramente continua e derivabile in ogni $x \neq \pi$.

Riguardo a π notiamo che

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(|x|)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{x-\pi} \underset{(\text{Hôp.})}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)}{1} = -1 = f(\pi)$$

e quindi f è continua anche in π. Riguardo alla derivabilità

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\frac{\sin(|x|)}{x-\pi}+1}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)+x-\pi}{(x-\pi)^2} \underset{(\text{Hôp.})}{=}$$

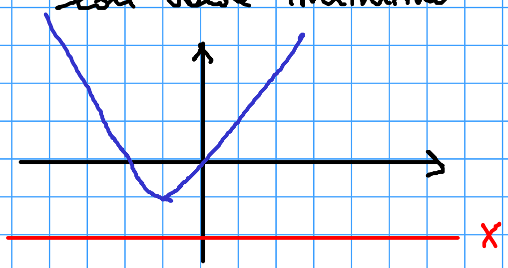
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{2(x-\pi)} \underset{(\text{Hôp.})}{=} \lim_{x\to\pi} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

($\Rightarrow$ f è derivabile anche in π). In definitiva

(a) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (b) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (c) $\boxed{\cancel{\text{SI}}}$ $\boxed{\text{NO}}$ (d) $\boxed{\text{SI}}$ $\boxed{\cancel{\text{NO}}}$

Riguardo alla parità è ovvio per esempio che $f(\pi) \neq f(-\pi)$.

(2) Consideriamo la funzione $f(y) = y^2+2y$. Si tratta di una parabola che ha due radici 0 e -2 e che ha minimo in $y=-1$ con valore minimo $(-1)^2+2(-1) = -1$ $\boxed{(a)\ \cancel{\sup A} = -1}$



L'insieme $A = \{x : f(y) \geq x \quad \forall y \in \mathbb{R}\}$ è fatto da tutte le costanti x che "stanno sempre sotto la funzione". È chiaro allora che la massima x possibile è il minimo di $f(y)$ e quindi è $\boxed{-1}$

(3) (a) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4^n+n^6 2^n} = \lim_{n\to+\infty} 4 \sqrt[n]{1+\frac{n^6}{2^n}} = 4$$

(b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+6n^4)}{\ln(1+4n^6)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(6n^4\left(1+1/6n^4\right)\right)}{\ln\left(4n^6\left(1+1/4n^6\right)\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(6)+4\ln(n)+\ln(1+1/6n^4)}{\ln(4)+6\ln(n)+\ln(1+1/4n^6)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4\ln(n)}{6\ln(n)} \cdot \frac{1+o(1)}{1+o(1)} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

(4) $(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(1+\sin(x))}{x}} = (\ast)$. Allora

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad ; \quad \ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

$$\ln(1+\sin(x)) = \ln\Big(1 + \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}_{y}\Big) =$$

$$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x + o(x^2)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + o(x^2)\right)^3 + o\left(O(x)\right)^3 =$$

$$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3) =$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow \frac{\ln(1+\sin(x))}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

Dato che $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$ si ha:

$$(\ast) = e^{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} =$$

$$e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right)^2 + o(x^2)\right) =$$

$$e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = e - \frac{e}{2}x + \frac{7e}{24}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}} - 2e + ex}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{12}e\,x^2 + o(x^2)}{x^2} = \boxed{\frac{7e}{12}}$$

5) $y'' + 3y' = e^{-2x}$

Il pol. caratteristico dell'eq. è $P(z) = z^2 + 3z$ che ha radici -3 e 0. Dunque l'eq omogenea ha sol.

$$y_0(x) = c\, e^{-3x} + d \qquad c, d \text{ costanti}$$

Una sol. particolare $\bar{y}(x)$ si può cercare della forma $\bar{y}(x) = \gamma e^{-2x}$; allora

$$\bar{y}'' + 3\bar{y}' = \gamma\left(4e^{-2x} - 6e^{-2x}\right) = -2\gamma e^{-2x}$$

per cui devo prendere $\gamma = -\frac{1}{2}$. Dunque

$$y(x) = c\, e^{-3x} + d - \frac{1}{2} e^{-2x} \qquad c, d \text{ costanti}$$

Imponiamo le cond. iniziali.

$$y(0) = c + d - \frac{1}{2} = 0$$

$$y'(x) = -3c\, e^{-3x} + e^{-2x} \Rightarrow y'(0) = -3c + 1 = 0$$

da cui si ricava $c = \frac{1}{3}$ e $d = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. In definitiva

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3} e^{-3x} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} e^{-2x}}$$

. Ne segue

(a) $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = +\infty$ (b) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \frac{1}{6}$

$$y'(x) = -e^{-3x} + e^{-2x} \quad \text{da cui}$$

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} y'(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$

(a) SI ~~NO~~ (b) ~~SI~~ NO (c) SI ~~NO~~ (d) ~~SI~~ NO

(6) Il termine generale della prima serie è il valore assoluto del termine generale della seconda. Dunque la convergenza assoluta delle due è ESATTAMENTE la stessa cosa. Prendiamo la prima e usiamo il criterio della radice

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{1+3^n}} = \frac{2}{3}\sqrt[n]{\frac{2}{3^{-n}+1}} \to \frac{2}{3} < 1.$$

Dunque convergono assolutamente entrambe ~~sia la (1) che la (2)~~

(7) Si ha: $\dfrac{2-x}{8+x^3} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+4} = \dfrac{A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2)}{8+x^3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=-1 \\ 4A+2C=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=1-2A \\ -2A-2B+1-2A=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=1/3 \end{cases}$$

Dunque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2-x}{8+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-2x+4}\right)dx =$

$$\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{d}{dx}(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4}\right)dx = \frac{1}{3}\left[\ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+4}}\right]_0^{+\infty} =$$

$$-\frac{1}{3}\ln\frac{2}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}\ln(1) = \boxed{0}$$

(8) $y' = \frac{xy}{3+x^2} + 1 - x \qquad y(0) = y_0$

(a) Applicando la formula risolutiva: $\left(A(x) = \sqrt{\frac{3+x^2}{3}}\right)$

$$y(x) = \sqrt{\frac{3+x^2}{3}}\left(y_0 + \int_0^x (1-t)\sqrt{\frac{3}{3+t^2}}\,dt\right) =$$

$$\sqrt{3+x^2}\left(\frac{y_0}{\sqrt{3}} + \left[\operatorname{arcsinh}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) - \sqrt{3+t^2}\right]_0^x\right) =$$

$$\boxed{\sqrt{3+x^2}\left(\frac{y_0+3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3+x^2} + \operatorname{arcsinh}(x/\sqrt{3})\right)}$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$

dato che $\frac{\operatorname{arcsinh}(x/\sqrt{3})}{\sqrt{3+x^2}} \to 0$ se $x \to +\infty/-\infty$

come si può vedere usando de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arcsinh}(x/\sqrt{3})}{\sqrt{3+x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}}{\frac{x}{\sqrt{3+x^2}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e quindi il "termine dominante" nella parentesi è $\sqrt{3+x^2}$.

(c) Studiamo il segno di $y'(x)$. Se poniamo

$F(x,y) = \frac{xy}{3+x^2} + 1 - x$, allora l'eq. diff si scrive

$y' = F(x,y)$ da cui

$$y'(x)>0 \iff F(x,y(x)) > 0 \iff xy > (x-1)(3+x^2)$$

$$\iff y(x) \begin{cases} > g(x) & \text{se } x>0 \\ < g(x) & \text{se } x<0 \end{cases} \qquad \text{dove } g(x) := \frac{(x-1)(x^2+3)}{x} = \frac{x^3-x^2+3x-3}{x}$$

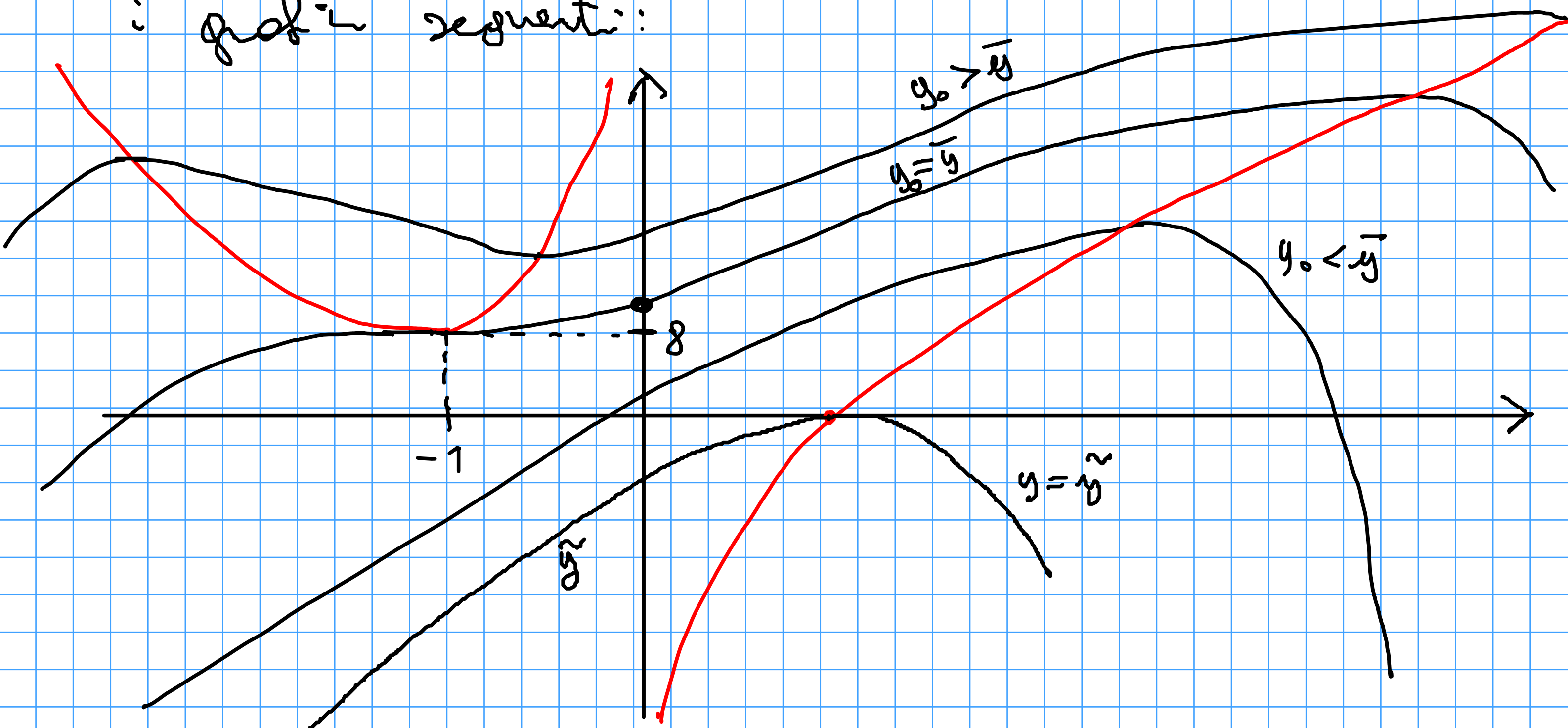
Si vede che

$\lim_{x \to +\infty \atop -\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$

$g(1) = 0$, $g'(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x^2} = \frac{2x^3 - x^2 + 3}{x^2} = \frac{(x+1)(2x^2-3x+3)}{x^2}$

che si annulla solo per $x = -1$, e $g(-1) = 8$

Tracciando il grafico di $g(x)$ (curva rosso) e tenendo conto del segno di y ricaviamo i grafici seguenti:



Il punto $\bar{y}$ è il valore in zero della soluzione $y(x)$ che in -1 vale 8, cioè

$$8 = \sqrt{3+(-1)^2}\left(\frac{\bar{y}+3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3+(-1)^2} + \operatorname{arcsinh}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$8 = 2\left(\frac{\bar{y}+3}{\sqrt{3}} - 2 - \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{3})\right) \Leftrightarrow$$

$$6 + \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{3}) = \frac{\bar{y}+3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\bar{y} = \sqrt{3}\left(6 + \operatorname{arcsinh}(1/\sqrt{3})\right) - 3}$$

(d) Dal grafico si vede che l'equazione $y(x)=0$ non ha soluzioni se e solo se $y_0 < \tilde{y}$ dove $\tilde{y}$ è il valore in zero della soluzione $y(x)$ che in $x=1$ passa per zero; cioè:

$$0 = \sqrt{3+1^2}\left(\frac{\tilde{y}+3}{\sqrt{3}} - \sqrt{3+1^2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{\tilde{y}+3}{\sqrt{3}} - 2 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tilde{y}+3}{\sqrt{3}} = 2 - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\tilde{y} = \sqrt{3}\left(2 - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - 3}$$