(1) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2) - x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Usando Taylor si vede che

$$f(x) = \frac{x^2 + o(x^2) - x}{x} = -1 + x + o(x).$$ Ne segue che

(a) $\boxed{f \text{ è continua}}$

(b) $\boxed{f \text{ è derivabile e } f'(0) = 1}$

Inoltre f è sicuramente limitata in ogni intervallo limitato $[a,b]$ (per Weierstrass). Dato che $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} \to 0$ per $x \to \pm\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$ da cui

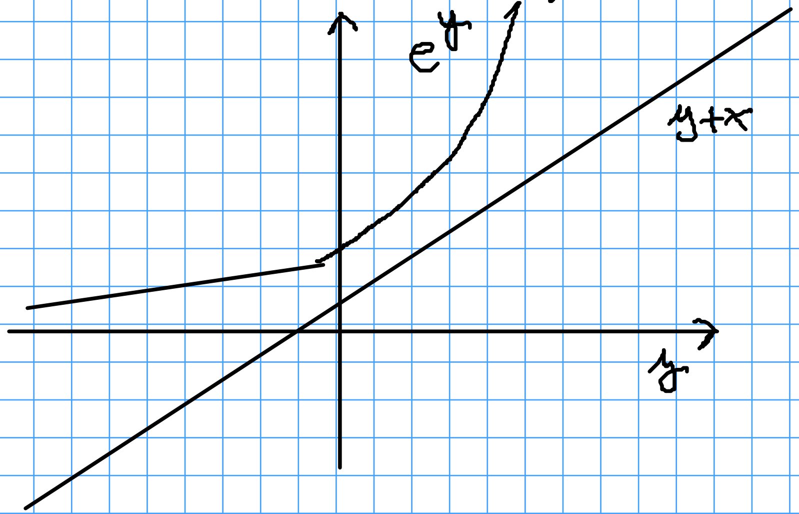
(c) f $\boxed{\text{è limitata}}$ su $\mathbb{R}$. Infine

(d) $\boxed{f \text{ non è dispari}}$; per esempio

$f(-1) = -(\ln(2)+1)$ $\quad f(1) = \ln(2) - 1$ che non sono l'uno opposto dell'altro

(2) $A = \{ x : e^y \geq x + y \quad \forall y \in \mathbb{R} \}$

Un numero reale x è elemento di A se e solo se la funzione $y \to e^y$ è sempre sopra la retta $y \to y + x$. Dato che e^y è convessa e nell'origine ha come tangente la retta $1 + y$ si vede che il massimo valore di x per cui la retta $y \mapsto y + x$ sta sotto l'esponenziale è



dato da $\boxed{x = 1}$

(3)

(a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^9+5^{\sqrt{n}}}{1+n-n^6} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{5^{\sqrt{n}}}{n^6}}_{\downarrow\, +\infty} \frac{n^9\, 5^{-\sqrt{n}}+1}{\underbrace{n^{-6}+n^{-5}-1}_{\downarrow\, -1}} = \boxed{-\infty}$$

Infatti, per qualunque K intero positivo, (qui $K=6$, $K=9$)

$$\frac{5^{\sqrt{n}}}{n^K} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln 5}}{n^K} = e^{\sqrt{n}\ln(5) - K\ln(n)} = e^{\sqrt{n}\left(\ln(5) - \frac{K\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)}$$

$\longrightarrow +\infty$, visto che $\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

(b) $$\left(\frac{3n^2+6n+5}{3n^2+9n+3}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{3n^2+6n+5}{3n^2+9n+3}\right)} = e^{n\ln\left(\frac{n^2+2n+5/3}{n^2+3n+1}\right)} =$$

$$e^{n\ln\left(1+\frac{-n+2/3}{n^2+3n+1}\right)} = e^{n\left(\frac{-n+2/3}{n^2+3n+1}+o\left(\frac{-n+2/3}{n^2+3n+1}\right)\right)} =$$

$$e^{\frac{-n^2+(2/3)n}{n^2+3n+1}+o\left(\frac{-n^2+(2/3)n}{n^2+3n+1}\right)} \longrightarrow \boxed{e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(6x)\, e^{18x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2} = \boxed{324}$$

Infatti usando Taylor:

- $$\cos(6x) = 1 - \frac{(6x)^2}{2} + \frac{(6x)^4}{24} + o(x^4) =$$
$$1 - \frac{36}{2}x^2 + \frac{1296}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - 18x^2 + 54x^4 + o(x^4)$$

- $$e^{18x^2} = 1 + 18x^2 + \frac{(18x^2)^2}{2} + o(x^4) =$$
$$1 + 18x^2 + 162x^4 + o(x^4)$$

- $$\cos(6x)\, e^{18x^2} = \left(1 - 18x^2 + 54x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + 18x^2 + 162x^4 + o(x^4)\right)$$
$$= 1 + \cancel{18x^2} + 162x^4 - \cancel{18x^2} - 324x^4 + 54x^4 + o(x^4) =$$
$$= 1 - 108x^4 + o(x^4)$$

- $$\sin^2(x) - x^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 - x^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 - x^2 =$$
$$x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) - x^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\cos(6x)\, e^{18x^2} - 1}{\sin(x^2) - x^2} = \frac{-108x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{3} + o(x^4)} \longrightarrow \frac{-108}{-\frac{1}{3}} = 324$$

(5) $\quad y'' + 9y = e^x \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$

Le soluzioni dell'omogenea sono $c \sin(3x) + d\cos(3x)$ (al variare di c e d in $\mathbb{R}$). Cerco una sol. particolare

$$\bar{y}(x) = \gamma e^x \Rightarrow \bar{y}'(x) = \gamma e^x \qquad \bar{y}''(x) = \gamma e^x$$

$\Rightarrow \bar{y}'' + 9\bar{y} = 10\gamma e^x$. L'equazione è soddisfatta $\Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{10}$

Dunque la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = c\sin(3x) + d\cos(3x) + \frac{e^x}{10}$$

Allora $y(0) = d + \frac{1}{10}$; $y'(x) = 3c\cos(3x) - 3d\sin(3x) + \frac{e^x}{10}$ e

$y'(0) = 3c + \frac{1}{10}$

Imponendo le cond. iniziali $d = -\frac{1}{10}$ $\quad c = \frac{3}{10}$ e dunque

$$y(x) = \frac{3}{10}\sin(3x) - \frac{1}{10}\cos(3x) + \frac{e^x}{10}$$

e

$$y'(x) = \frac{9}{10}\cos(3x) + \frac{3}{10}\sin(3x) + \frac{e^x}{10}$$

Se ne deduce che

(a) $\lim_{x \to -\infty} y(x)$ NON ESISTE R: $\boxed{\text{NO}}$

(b) $\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$ R: $\boxed{\text{SÌ}}$

(c) $y'(\pi) = \frac{9}{10}\cos(3\pi) + \frac{3}{10}\sin(3\pi) + \frac{e^\pi}{10} = -\frac{9}{10} + \frac{e^\pi}{10}$ R: $\boxed{\text{SÌ}}$

(d) $y(\pi) = \frac{9}{10}\sin(3\pi) - \frac{1}{10}\cos(3\pi) + \frac{e^\pi}{10} = \frac{1}{10} + \frac{e^\pi}{10}$ R: $\boxed{\text{NO}}$

(6) Se $a_n = \dfrac{n^{\alpha} + n^{1-5\alpha}}{1+n^4}$ notiamo che

$$a_n = \frac{n^{\beta} + o(n^{\beta})}{n^4 + o(n^4)} \;\;\text{(dove } \beta = \max(\alpha, 1-5\alpha)\text{)}$$

$$n^{\beta-4} + o(n^{\beta-4})$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta-4}$ che, come noto, converge se e solo se

$\beta - 4 < -1 \iff \beta < 3$. Dunque la condizione su α è

$$\max(\alpha, 1-5\alpha) < 3 \iff (\alpha < 3) \wedge (1-5\alpha < 3)$$

$$\iff (\alpha < 3) \wedge (-2 < 5\alpha) \iff (\alpha < 3) \wedge \left(\alpha > -\frac{2}{5}\right)$$

$$\iff \boxed{\alpha \in \left]-\frac{2}{5}, 3\right[}$$

7) $$\int_{\sqrt[4]{3}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^4}} = \circledast$$

Posto $y = \sqrt{1+x^4}$ si ha $y^2 = 1+x^4 \iff x = (y^2-1)^{\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}(y^2-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2y\,dy = \frac{y}{2}(y^2-1)^{-\frac{3}{4}}\,dy \,. \quad \text{Allora}$$

$$\circledast = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(y^2-1)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\cancel{y}} \frac{\cancel{y}}{2}(y^2-1)^{-\frac{3}{4}}\,dy =$$

$$\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{dy}{(y^2-1)} = \frac{1}{4}\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy =$$

$$\frac{1}{4}\left[\ln \frac{y-1}{y+1}\right]_2^{+\infty} = \frac{1}{4}\left(0 - \ln\frac{2-1}{2+1}\right) = \boxed{\frac{1}{4}\ln(3)}$$

8) $$(x+1)\,y' = 3y - \frac{2x^2+4x+2}{x+2}, \quad y(0)=y_0 \qquad x>-1$$

(a) In forma normale:

$$y' = \frac{3}{x+1}\,y - \frac{2(x+1)^2}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{x+1}\,y - \frac{2(x+1)}{(x+2)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = (x+1)^3\left(y_0 - 2\int_0^x \frac{(t+1)}{(t+2)(t+1)^3}\,dt\right) =$$

$$(x+1)^3\left(y_0 - 2\int_0^x \frac{dt}{(t+2)(t+1)^3}\right) =$$

$$(x+1)^3\left(y_0 - 2\int_0^x \left\{\frac{A}{(t+2)} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}\right\} dt\right) \qquad \text{dove}$$

$$A(t+1)^2 + B(t+2)(t+1) + C(t+2) = 1 \iff$$

$$A(t^2+2t+1) + B(t^2+3t+2) + C(t+2) = 1 \iff$$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ 2A+3B+C = 0 \\ A+2B+2C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -A \\ -A+C = 0 \\ -A+2C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = -A \\ C = A \\ A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$y(x) = (x+1)^3 \left(y_0 - 2\left[\ln\left|\frac{t+2}{t+1}\right| - \frac{1}{t+1} \right]_0^x \right) =$$

$$(x+1)^3 \left(c + 2\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \frac{2}{x+1} \right)$$

dove $c = y_0 + \ln 4 - 2$

(b) $\lim_{x \to 1^+} y(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+1)^2 \left(c(x+1) + 2(x+1)\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + 2 \right) = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \iff y_0 > 2 - \ln(4) =: \bar{y} \\ -\infty & \text{se } c < 0 \iff y_0 < \bar{y} \end{cases}$$

Nel caso $c = 0$ si può usare Taylor:

$$2(x+1)^3 \left(\frac{1}{x+1} - \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \right) = 2(x+1)^3 \left(\frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \right) =$$

$$2(x+1)^3 \left(\cancel{\frac{1}{x+1}} - \cancel{\frac{1}{x+1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} + o\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right) \right) = (x+1) + o(x+1) \to +\infty$$

(c) Cerchiamo le zone (x, y) in cui $y(x)$ è crescente. Posto

$$F(x,y) = \frac{3y}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x+2}$$ (di modo che l'eq. diff. diventa $y' = F(x,y)$)

risulta

$$F(x,y) > 0 \iff \frac{3y}{x+1} > \frac{2(x+1)}{x+2} \iff y > \frac{2}{3}\frac{(x+1)^2}{x+2} =: g(x)$$

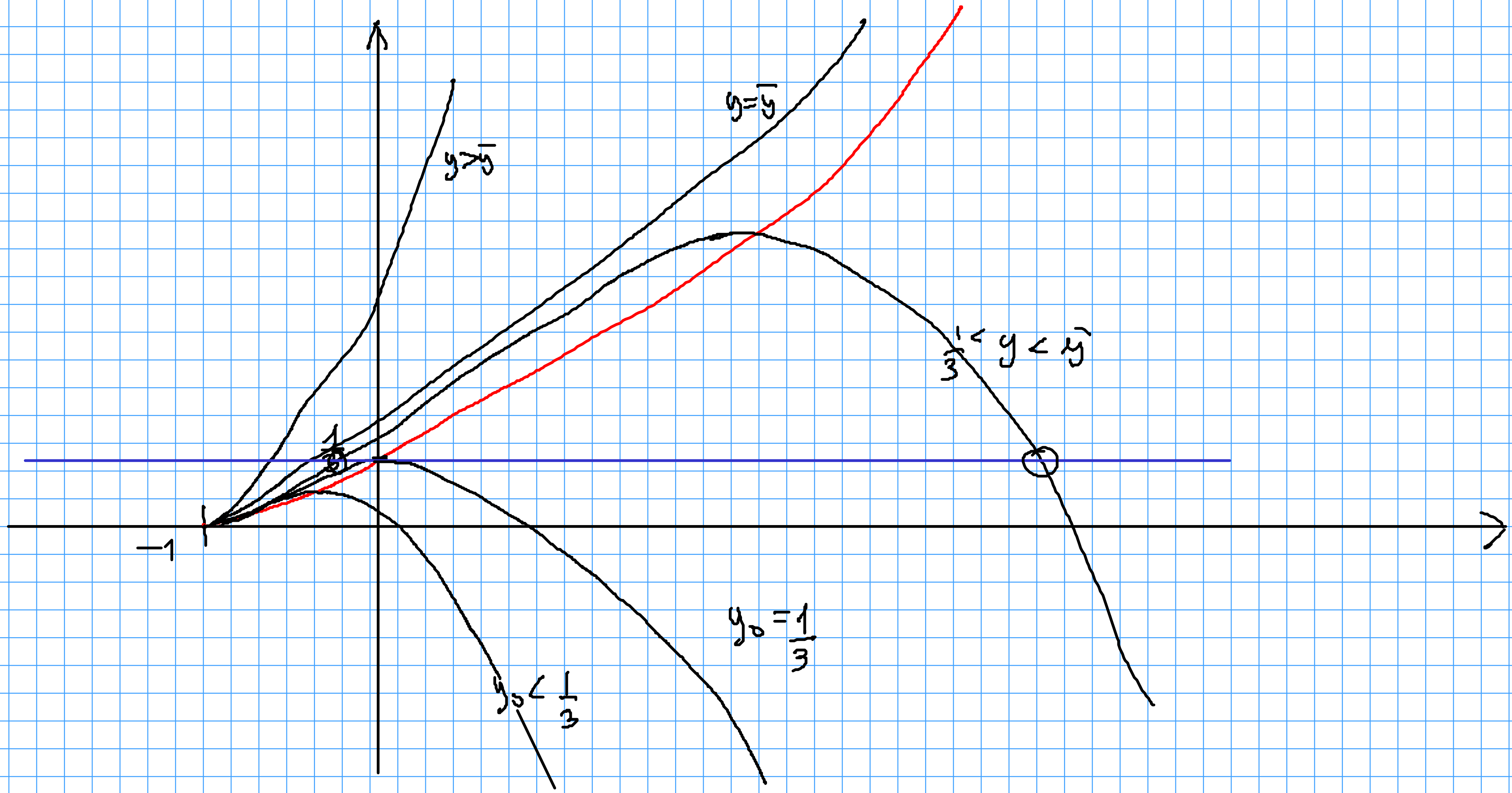
Studiamo $g(x)$ su $[-1, +\infty[$.

$g(-1) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $g'(x) = \frac{2}{3}\frac{2(x+1)(x+2) - (x+1)^2}{(x+2)^2} =$

$\frac{2}{3}\frac{(x+1)}{(x+2)^2}(2x+4-x-1) = \frac{2}{3}\frac{(x+1)}{(x+2)^2}(x+3)$ sempre >0 su $]1, +\infty[$.

Ne risulta il grafico di g indicato in rosso (NOTA $g(0) = 1/3$)

d) Dai grafici risulta che $y(x)$ interseca due volte la retta $y = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{3} < y_0 < \overline{y}$ cioè $\frac{1}{3} < y_0 < 2 - \ln(4)$



$y > \bar{y}$
$y = \bar{y}$
$\frac{1}{3} < y < \bar{y}$
-1
$\frac{1}{3}$
$y_0 = \frac{1}{3}$
$y_0 < \frac{1}{3}$