Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 20 luglio 2009 FILA A

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è continua su $\mathbb{R}$; (b) f è derivabile in $x = 0$;
   (c) f è limitata su $\mathbb{R}$; (d) f è pari su $\mathbb{R}$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \arctan(y) \geq \frac{x}{2}\ \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup A = \frac{\pi}{2}, (b)\ \sup A = -\frac{\pi}{2}, (c)\ \sup A = \pi, (d)\ \sup A = -\pi, (e)\ \sup A = +\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^9 - 5^{\sqrt{n}}}{n^2 + 1} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 5}{n^2 + 9n + 3}\right)^n$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y = e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a) \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad (b) \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (c)\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (d)\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

6. Si indichi l'insieme degli α in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^{1-4\alpha}}{1 + n^3}$$

$$(a)\ \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[,\ (b)\ \left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup\,]2, +\infty[,\ (c)\ ]2, +\infty[,\ (d)\ \left]-\frac{1}{4}, 2\right[,\ (e)\ \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{25 + x^2}(x + 5)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$2(x + 1)y' = y - \frac{4x + 4}{x + 4}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 1$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 20 luglio 2009 FILA B

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è derivabile in $x = 0$; (b) f è continua su $\mathbb{R}$;
   (c) f è pari su $\mathbb{R}$; (d) f è limitata su $\mathbb{R}$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\arctan(y) \geq \frac{x}{2}\ \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup A = +\infty, (b)\ \sup A = \frac{\pi}{2}, (c)\ \sup A = -\frac{\pi}{2}, (d)\ \sup A = \pi, (e)\ \sup A = -\pi.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 4}{n^2 + 8n + 3}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^8 - 4^{\sqrt{n}}}{n^3 + 1}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y = e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (b)\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (d)\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty.$$

6. Si indichi l'insieme degli α in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^{1-3\alpha}}{1 + n^3}$$

$$(a)\ \mathbb{R},\ (b)\ \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[\cup]2, +\infty[,\ (c)\ \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right[,\ (d)\ ]2, +\infty[,\ (e)\ \left]-\frac{1}{3}, 2\right[.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{16 + x^2}(x + 4)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$2(x + 1)y' = y - \frac{4x + 4}{x + 4}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 1$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 20 luglio 2009 FILA C

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è limitata su $\mathbb{R}$; (b) f è pari su $\mathbb{R}$;
   (c) f è continua su $\mathbb{R}$; (d) f è derivabile in $x = 0$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \arctan(y) \leq \frac{x}{2} \; \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \inf A = -\frac{\pi}{2}, (b)\ \inf A = -\pi, (c)\ \inf A = \frac{\pi}{2}, (d)\ \inf A = \pi, (e)\ \inf A = -\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5 - 3^{\sqrt{n}}}{n^4 + 1} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 3}{n^2 + 5n + 3}\right)^n$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y = e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a) \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (b) \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad (c)\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (d)\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

6. Si indichi l'insieme degli α in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^{1-6\alpha}}{1 + n^3}$$

$$(a)\ ]2, +\infty[\,,\ (b)\ \left]-\frac{1}{6}, 2\right[,\ (c)\ \left]-\infty, -\frac{1}{6}\right[,\ (d)\ \left]-\infty, -\frac{1}{6}\right[\cup]2, +\infty[\,,\ (e)\ \mathbb{R}.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}(x + 3)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$2(x + 1)y' = y - \frac{4x + 4}{x + 4}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 1$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 20 luglio 2009 FILA D

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := 0$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è pari su $\mathbb{R}$; (b) f è limitata su $\mathbb{R}$;
   (c) f è derivabile in $x = 0$; (d) f è continua su $\mathbb{R}$.

2. Se A è l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : -\arctan(y) \leq \frac{x}{2}\ \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \inf A = -\infty, (b)\ \inf A = -\pi, (c)\ \inf A = -\frac{\pi}{2}, (d)\ \inf A = \frac{\pi}{2}, (e)\ \inf A = \pi.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (3 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 2}{n^2 + 7n + 3}\right)^n \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^7 - 2^{\sqrt{n}}}{n^4 + 1}$$

4. Si calcoli il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)e^{2x^2} - 1}{\sin^2(x) - x^2}$$

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' - y = e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (b)\ y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{e}}, \quad (c)\ \lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty, \quad (d)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

6. Si indichi l'insieme degli α in $\mathbb{R}$ per cui la seguente serie numerica converge: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha + n^{1-5\alpha}}{1 + n^3}$$

$$(a)\ \mathbb{R},\ (b)\ \left]-\frac{1}{5}, 2\right[,\ (c)\ ]2, +\infty[,\ (d)\ \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[\cup]2, +\infty[,\ (e)\ \left]-\infty, -\frac{1}{5}\right[.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (4 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}(x + 2)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$2(x + 1)y' = y - \frac{4x + 4}{x + 4}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = 1$ ha due soluzioni (1 p.).