Compito di Analisi I del 20/07/2009

(1) $f(x) = \dfrac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x}$; usando Taylor

$$f(x) = \left(1 + |x| + \frac{1}{2}|x|^2 + o(|x|^2) - 1 - |x|\right)\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x + o(x)$$

Ne segue che f è continua e derivabile in zero (e $f'(0) = \frac{1}{2}$)

È anche chiaro che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ NON è limitata

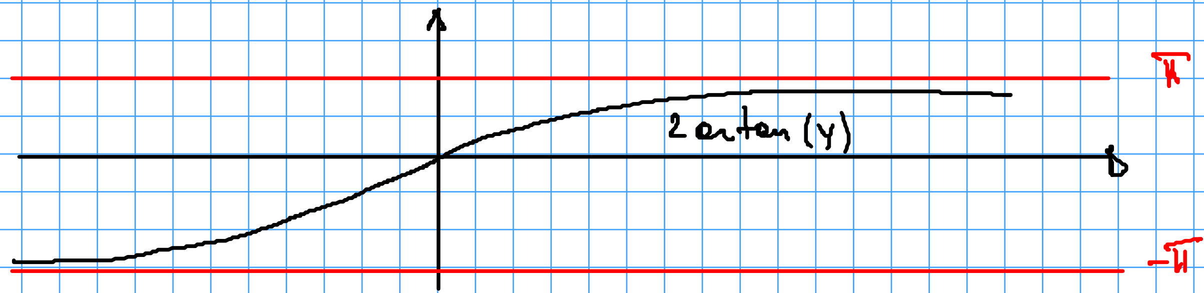
e che $$f(-x) = \frac{e^{|-x|} - 1 - |-x|}{-x} = -\frac{e^{|x|} - 1 - |x|}{x} = -f(x)$$

quindi f è dispari, da cui (non essendo $f \equiv 0$) f NON è pari

(2) File A $\quad A := \{x \in \mathbb{R} : \arctan(y) \geq \frac{x}{2} \ \forall y \in \mathbb{R}\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : 2\arctan(y) \geq x \ \forall y \in \mathbb{R}\}$

Allora $\sup A = \sup\{$minoranti della funzione $2\arctan(y)\} = \inf_{y \in \mathbb{R}} 2\arctan(y) = \boxed{-\pi}$



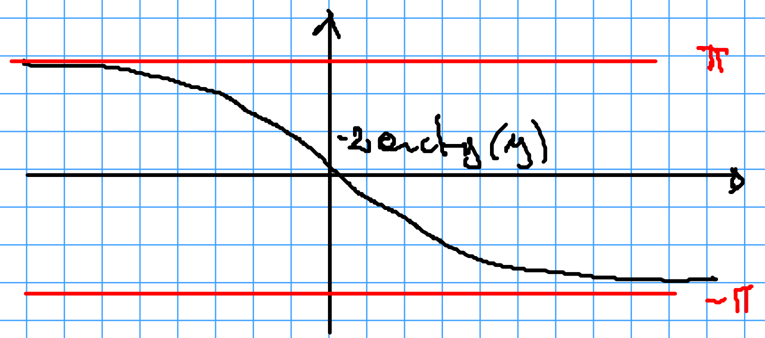
(file A/C)

IN MODO simile si ragiona per le altre file

File B: $\sup A = \dots = \inf_{y \in \mathbb{R}} -2\arctan(y) = \boxed{-\pi}$

File C $\inf A = \dots = \sup_{y \in \mathbb{R}} 2\,\mathrm{arctg}(y) = \boxed{\pi}$

File D $\inf A = \dots = \sup_{y \in \mathbb{R}} -2\,\mathrm{arctg}(y) = \boxed{\pi}$



file (B/D)

(3)

(i) $\lim_{n \to \infty} \dfrac{n^a - A^{\sqrt{n}}}{n^b + 1}$ (dove $0 < b < a$, $A > 1$)

$$\frac{n^a - A^{\sqrt{n}}}{n^b + 1} = \frac{e^{a\ln(n)} - e^{\sqrt{n}\ln(A)}}{e^{b\ln(n)} + 1} = \frac{e^{\sqrt{n}\ln(A)}}{e^{b\ln(n)}} \cdot \frac{e^{a\ln(n) - \sqrt{n}\ln(A)} - 1}{1 + e^{-b\ln(n)}} =$$

$$e^{\sqrt{n}\ln(A) - b\ln(n)} \, \frac{o(1) - 1}{1 + o(1)} \longrightarrow +\infty \cdot (-1) = \boxed{-\infty}$$

si è usato il fatto che

$$\sqrt{n}\,\ln(A) - b\ln(n) \to +\infty \;/\; \sqrt{n}\,\ln(A) - a\ln(n) \to +\infty$$

in quanto $\ln(A) > 0$ $(A > 1)$ e $\sqrt{n}$ "vince" sui logaritmi

(ii) $$\left(\frac{n^2 + an + b}{n^2 + cn + d}\right)^n = \left(1 + \frac{(a-c)n + b - d}{n^2 + cn + d}\right)^n =$$

$$e^{n\ln\left(1 + (a-c)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{a-c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \to \boxed{e^{a-c}}$$

che, fila per fila, dava:

(A) e^{-7} (B) e^{-5} (C) e^{-1} (D) e^{-3}

(5) $$\begin{cases} y'' - y = e^x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Polinomio caratteristico $\to$ $p(z) = z^2 - 1$, radici ± 1 $\Rightarrow$

sol. dell'omogenea $y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Dato che il termine noto è sol. dell'omogenea cerco la sol. part. come

$\bar{y}(x) = \gamma x e^x \Rightarrow \bar{y}'(x) = \gamma(1+x)e^x$, $\bar{y}''(x) = \gamma(2+x)e^x$ e

$\bar{y}''(x) - \bar{y}(x) = 2\gamma e^x \rightarrow$ scelgo $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\bar{y}(x) = \frac{x}{2} e^x$

Allora la sol. generale è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x$

che ha come derivata $y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + \frac{1+x}{2} e^x$

Imponendo le cond. iniziali trovo

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} c_1 = -1/4 \\ c_2 = 1/4 \end{matrix} \Leftrightarrow \underline{y(x) = -\frac{e^x}{4} + \frac{e^{-x}}{4} + \frac{x}{2} e^x}$$

Allora $\boxed{\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty}$ ("vince" $x e^x$) → SÌ $\boxed{\lim_{x \to -\infty} y(x) = +\infty}$ → NO

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{1/2}}{4} + \frac{e^{-1/2}}{4} + \frac{1}{4} e^{1/2} = \boxed{\frac{1}{4\sqrt{e}}}$$ → SÌ

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{e^{1/2}}{4} - \frac{e^{-1/2}}{4} + \frac{3}{4} e^{1/2} = \boxed{\frac{e^{1/2}}{2} - \frac{e^{-1/2}}{4}}$$ → NO

(6) $\sum_n \frac{n^\alpha + n^{1-A\alpha}}{1+n^3}$ dove $A > 1$

Il termine generale della serie $a_n = \frac{n^\alpha + n^{1-A\alpha}}{1+n^3}$ è asintotico a $\frac{n^\beta}{n^3}$ dove $\beta = \max(\alpha, 1-A\alpha)$

Dato che la serie $\sum_n \frac{n^\beta}{n^3} = \sum_n \frac{1}{n^{3-\beta}}$ converge $\iff 3-\beta > 1 \iff \beta < 2$

anche la serie di partenza converge $\iff \max(\alpha, 1-A\alpha) < 2$

Questa condizione si verifica se e solo se $(\alpha < 2)$ E $(1-A\alpha < 2)$

cioè se $(\alpha < 2)$ E $\left(\alpha > -\frac{1}{A}\right)$ quindi per $\boxed{\alpha \in \left]-\frac{1}{A}, 2\right[}$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}\,(x+a)}\,dx$ con $a = 2, 3, 4, 5$ (a seconda della fila)

Se pongo $x = ay$ l'integrale diventa $\int_0^{+\infty} \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2+a^2y^2}\,(ay+a)} =$

$\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\,(y+1)}$. Sostituisco $\sqrt{y^2+1} = y + t \Rightarrow$

$$\cancel{y^2} + 1 = \cancel{y^2} + 2ty + t^2 \iff y = \frac{1-t^2}{2t}$$

$$\Rightarrow \quad y+1 = \frac{1-t^2+2t}{2t} \quad e \quad \frac{1}{y+1} = \frac{2t}{-t^2+2t+1}$$

$$y+t = \frac{1-t^2+2t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{2t} \quad e \quad \frac{1}{y+t} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$dy = \frac{-2t \cdot t - (1-t^2)}{2\,t^2}\,dt = \frac{-1-t^2}{2t^2}\,dt$$

inoltre se $y=0 \to t = \sqrt{1+0} - 0 = 1$, se $y \to +\infty$ $t = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}+t} \to 0$

da cui effettuando la sostituzione

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^2+1}\,(y+1)} = \int_1^0 \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2t}{-t^2+2t+1} \cdot \frac{-1-t^2}{2t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{2\,dt}{-t^2+2t+1}$$

A questo punto riduciamo in fratti semplici notando che

$$-t^2+2t+1 = -(t-1-\sqrt{2})(t-1+\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\frac{2}{-t^2+2t+1} = \frac{A}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{B}{t-1+\sqrt{2}} = \frac{(A+B)t + A(-1+\sqrt{2}) + B(-1-\sqrt{2})}{t^2-2t-1} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A(-1+\sqrt{2})+B(-1-\sqrt{2}) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ 2\sqrt{2}A = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1/\sqrt{2} \\ A = -1/\sqrt{2} \end{cases}$$ e quindi

$$\int_0^1 \frac{2}{-t^2+2t+1}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left(-\frac{1}{t-1-\sqrt{2}} + \frac{1}{t-1+\sqrt{2}}\right)dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ln\left|\frac{t-1+\sqrt{2}}{t-1-\sqrt{2}}\right|\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\ln 1 - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)^2 = \boxed{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})} \quad \left(= \sqrt{2}\,\text{settsinh}(1)\right)$$

(4) $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)\,e^{2x^2}-1}{\sin^2(x)-x^2}$$ Usiamo Taylor.

$$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4) =$$

$$1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{2x^2} = 1 + 2x^2 + \frac{1}{2}(2x^2)^2 + o(x^4) =$$

$$1 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)$$

$$\cos(2x)e^{2x^2} = \left(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\right)\left(1+2x^2+2x^4+o(x^4)\right) =$$

$$1+\cancel{2x^2}+2x^4+o(x^4)-\cancel{2x^2}-4x^4+o(x^4)+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)+o(x^4) =$$

$$1+\left(2-4+\frac{2}{3}\right)x^4+o(x^4) = 1-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)$$

$$\sin^2(x) = \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2 = x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2 =$$

$$x^2\left(1+2\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)+o\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)\right) = x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right) =$$

$$x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4).$$

METTENDO TUTTO INSIEME

$$\frac{\cos(2x)e^{2x^2}-1}{\sin^2(x)-x^2} = \frac{-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)}{-\frac{x^4}{3}+o(x^4)} \longrightarrow \boxed{4}$$

(8) Mettendo l'eq. in forma normale:

$$y' = \frac{y}{2(x+1)} - \frac{2}{x+4} \qquad x > -1 \qquad y(0) = y_0$$

Applicando la formula risolutiva:

$$y(x) = \sqrt{x+1}\left(y_0 - \int_0^x \frac{2\,dt}{(t+4)\sqrt{t+1}} \right)$$

Facciamo l'integrale sostituendo $s = \sqrt{t+1} \Rightarrow t = s^2 - 1 \quad dt = 2s\,ds$

$$\int_0^x \frac{2\,dt}{(t+4)\sqrt{t+1}} = \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{4\cancel{s}\,ds}{(s^2+3)\cancel{s}} = \frac{4}{3}\int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{ds}{\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) \right]_1^{\sqrt{1+x}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1+x}{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{3}} - \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \sqrt{x+1}\left(\underbrace{y_0 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi}_{C} - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{3}} \right)$$

$$y_1 := -\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

Allora

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = 0 = \begin{cases} 0^+ \text{ se } C > 0 \leftrightarrow y_0 > y_1 \\ 0^- \text{ se } C \leq 0 \leftrightarrow y_0 \leq y_1 \end{cases}$$

(guardando il segno della parentesi tonda)

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty \\ 4 \\ -\infty \end{cases}$$

$$c > \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} \longrightarrow y_0 > \bar{y} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$c = \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} \longrightarrow y_0 = \bar{y}$$

$$c < \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} \longleftrightarrow y_0 < \bar{y}$$

Nel caso $y_0 = \bar{y}$ si può usare de l'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c - \frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x+1}{3}}\right)}{(x+1)^{-1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{1}{\frac{x+1}{3}+1}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(x+1)^{-1/2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-3/2}} =$$

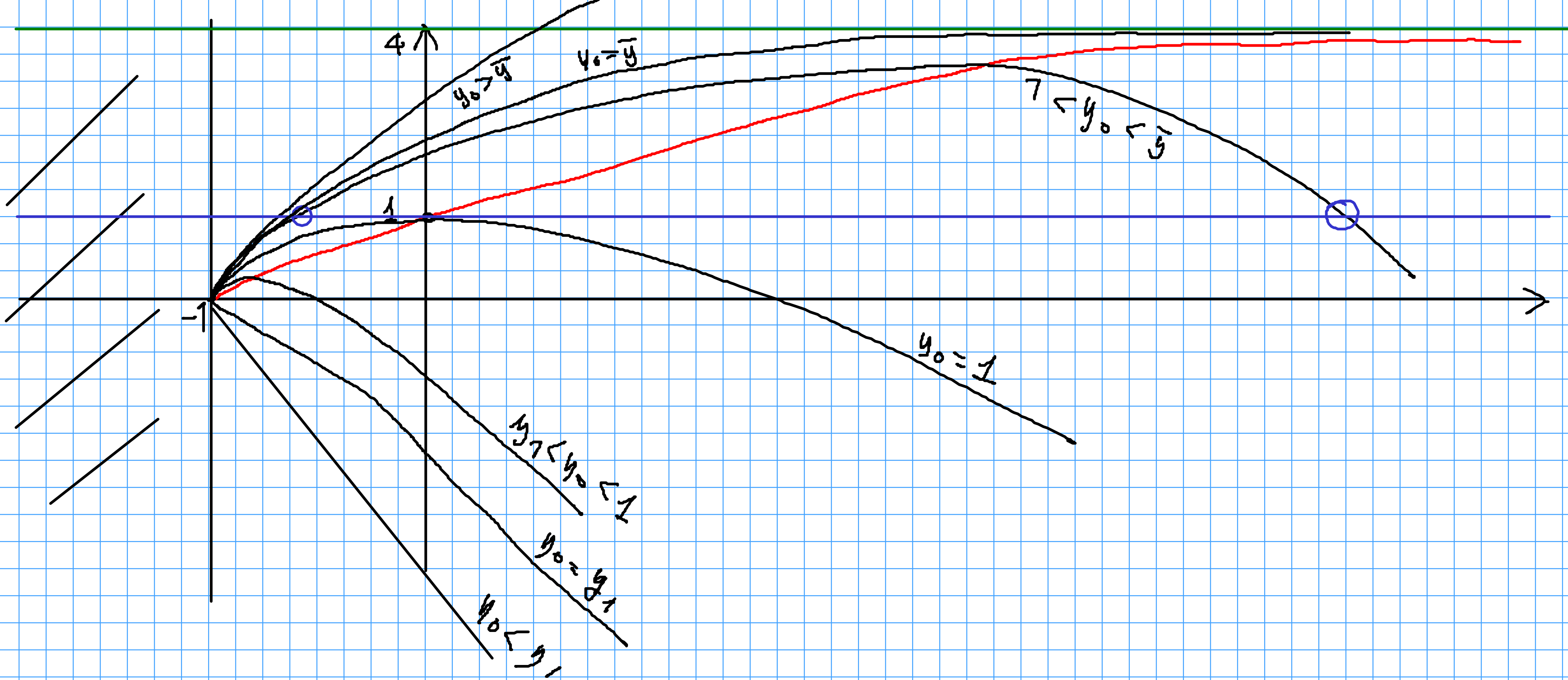
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x+4}}{\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)^{-1}} = \lim_{x\to+\infty} 4\,\frac{x+1}{x+4} = 4$$

Per la monotonia studiamo il segno della funzione ausiliaria

$$F(x,y) = y - \frac{4(x+1)}{x+4}$$ che dipende da $y \gtreqless g(x) := \frac{4(x+1)}{x+4}$

La $g(x)$ rappresenta un'iperbole (grafico rosso). Dunque

$$g(0) = 1, \quad g(-1) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 4$$



Si vede allora dai grafici che la y attraversa 2 volte la retta $y(x) = 1 \iff 1 < y_0 < \bar{y} \left(= \frac{4\sqrt{3}}{3}\pi\right)$