Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 29 giugno 2009 FILA A

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{-|x|}-1}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := -1$, allora (1/-1 p.)

   (a) f è continua su $\mathbb{R}$; (b) f è derivabile in $x = 0$;
   (c) f è limitata su $\mathbb{R}$; (d) f è pari su $\mathbb{R}$.

2. Se A é l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : y^2 + 5 \geq x \, \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

   (a) $\sup A = 0,$ (b) $\sup A = 5,$ (c) $\sup A = -5,$ (d) $\sup A = -\infty,$ (e) $\sup A = +\infty.$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^{\ln(n)}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(1+\ln(n)) - \ln(n)}{\ln(n^2)+9}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x)}{e^{-2x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ y(-x) = y(x), \quad (b)\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (c)\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad (d)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty.$$

6. Per quali valori di α converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^{4\alpha-1}}$$

(a) $\alpha \in]-\infty,-1[\cup \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, (b) $\alpha \in]-\infty,-1[$, (c) $\alpha \in \left]\frac{2}{3},+\infty\right[$, (d) $\alpha \in \left]-1,\frac{2}{3}\right[$, (e) $\alpha \in \mathbb{R}$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(25+x^2)(x+5)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y - \frac{3x+3}{x+3}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 29 giugno 2009 FILA B

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{-|x|}-1}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := -1$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è derivabile in $x = 0$; (b) f è continua su $\mathbb{R}$;
   (c) f è pari su $\mathbb{R}$; (d) f è limitata su $\mathbb{R}$.

2. Se A é l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : y^2 + 2 \geq x \, \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

   (a) $\sup A = -\infty$, (b) $\sup A = -2$, (c) $\sup A = 0$, (d) $\sup A = 2$, (e) $\sup A = +\infty$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^3(1+\ln(n)) - \ln(n)}{\ln(n^3)+6} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^{\ln(n)}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x)}{e^{-2x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (b)\ y(-x) = y(x), \quad (c)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (d)\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

6. Per quali valori di α converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^{5\alpha-1}}$$

$$(a)\ \alpha \in \mathbb{R},\ (b)\ \alpha \in]-\infty,-1[\cup \left]\frac{1}{2},+\infty\right[,\ (c)\ \alpha \in]-\infty,-1[,\ (d)\ \alpha \in \left]\frac{1}{2},+\infty\right[,\ (e)\ \alpha \in \left]-1,\frac{1}{2}\right[.$$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(16+x^2)(x+4)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y - \frac{3x+3}{x+3}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 29 giugno 2009 FILA C

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{-|x|} - 1}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := -1$, allora (1/-1 p.)
   (a) f è limitata su $\mathbb{R}$; (b) f è pari su $\mathbb{R}$;
   (c) f è continua su $\mathbb{R}$; (d) f è derivabile in $x = 0$.

2. Se A é l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : y^2 + 4 \geq x \, \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

   (a) $\sup A = 0$, (b) $\sup A = -\infty$, (c) $\sup A = +\infty$, (d) $\sup A = 4$, (e) $\sup A = -4$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n^{\ln(n)}} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^4(1+\ln(n)) - \ln(n)}{\ln(n^4)+1}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x)}{e^{-2x^2}} \right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad (b)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (c)\ y(-x) = y(x), \quad (d)\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

6. Per quali valori di α converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{1 + n^{2\alpha-1}}$$

(a) $\alpha \in \,]-1, 2[$, (b) $\alpha \in \mathbb{R}$, (c) $\alpha \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$, (d) $\alpha \in]-\infty, -1[$, (e) $\alpha \in \,]2, +\infty[$.

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(9+x^2)(x+3)} \, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y - \frac{3x+3}{x+3}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

   (a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
   (b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
   (c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
   (d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha due soluzioni (1 p.).

Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito dell' 29 giugno 2009 FILA D

1. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := \dfrac{e^{-|x|}-1}{|x|}$ per $x \neq 0$ e $f(0) := -1$, allora (1/-1 p.)

(a)	f è pari su $\mathbb{R}$;	(b)	f è limitata su $\mathbb{R}$;
(c)	f è derivabile in $x = 0$;	(d)	f è continua su $\mathbb{R}$.

2. Se A é l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : y^2 + 1 \geq x \, \forall y \in \mathbb{R}\}$ allora (2/-.5 punti) :

$$(a)\ \sup A = 0, (b)\ \sup A = -1, (c)\ \sup A = 1, (d)\ \sup A = +\infty, (e)\ \sup A = -\infty.$$

3. Si calcolino i seguenti limiti di successione (2,5 punti ciascuno)

$$(a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^5(1+\ln(n)) - \ln(n)}{\ln(n^5)+4} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{\ln(n)}}$$

4. Calcolare il seguente limite di funzione (5 punti)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x)}{e^{-2x^2}}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}}$$

---

5. Quali delle affermazioni sono vere per il seguente problema di Cauchy (1/-1 p.)

$$y'' + y = \cos(x), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0$$

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty, \quad (b)\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, \quad (c)\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}, \quad (d)\ y(-x) = y(x).$$

6. Per quali valori di α converge la seguente serie numerica: (2/-0.5 p.)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\alpha}{1+n^{3\alpha-1}}$$

$(a)\ \alpha \in]1, +\infty[\,,\ (b)\ \alpha \in]-1, 1[\,,\ (c)\ \alpha \in \mathbb{R},\ (d)\ \alpha \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\,,\ (e)\ \alpha \in]-\infty, -1[.$

7. Calcolare il seguente integrale improprio (se esiste) (3 punti)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4+x^2)(x+2)}\, dx$$

8. Sia $y_0 \in \mathbb{R}$ e si consideri l'equazione differenziale:

$$(x+1)y' = 2y - \frac{3x+3}{x+3}, \qquad (\text{per } x > -1), \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Si scriva l'espressione della soluzione $y(x)$ (in dipendenza da y_0) (2 p.);
(b) si calcolino (al variare di y_0) i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to +\infty$ (3 p.);
(c) si tracci il grafico di $y(x)$ per i valori (che si ritengono) più significativi di y_0 (1 p.);
(d) si dica per quali valori di y_0 l'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha due soluzioni (1 p.).