(1) $f(x) = \dfrac{e^{-|x|}-1}{|x|}$ $\quad (f(0) = -1)$. Allora usando Taylor

(a) $f(x) = \dfrac{1-|x| + o(|x|) - 1}{|x|} = -1 + o(1) \to -1 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ CONTINUA}}$

(dato che ovviamente f è continua nelle $x \neq 0$)

(b) Per vedere la derivabilità in zero facciamo il limite del rapp. incr.

(e usiamo Taylor all'ordine due: $e^{-|x|} = 1 - |x| + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$):

$$\frac{f(x)-f(1)}{x} = \frac{\frac{e^{-|x|}-1}{|x|} - 1}{x} = \frac{e^{-|x|}-1-|x|}{x|x|} = \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x|x|} \begin{cases} \nearrow \frac{1}{2} & \text{se } x \to 0^+ \\ \searrow -\frac{1}{2} & \text{se } x \to 0^- \end{cases}$$

dunque $\boxed{f \text{ NON È DERIVABILE IN ZERO}}$

(c) Dato che f è continua f è limitata in $[-1,1]$. Se $x \geq 1$

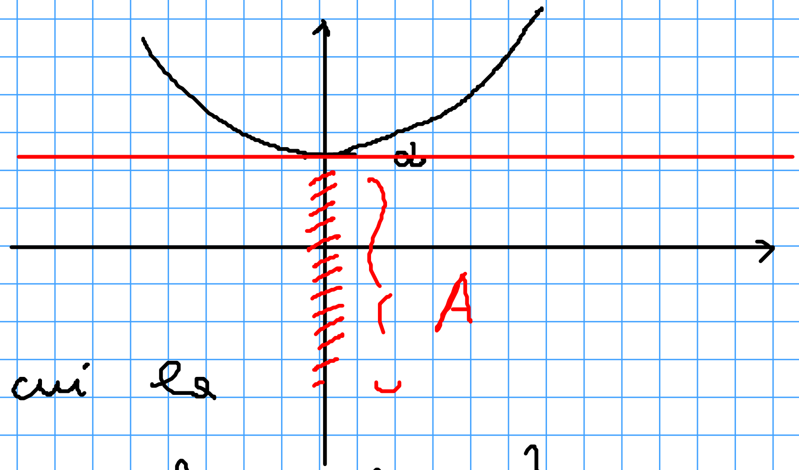
allora $|f(x)| \leq \dfrac{e^{-|x|}+1}{1} \leq 2$. Lo stesso vale se $x \leq -1$

dunque $\boxed{f \text{ È LIMITATA}}$

(d) $\boxed{f \text{ è PARI}}$: $f(-x) = \dfrac{e^{-|-x|}-1}{|-x|} = \dfrac{e^{-|x|}-1}{|x|} = f(x)$

(2) $A = \{ x : y^2 + \alpha \geq x \ \forall x \}$

Disegnamo la curva $y^2 + \alpha$ $\longrightarrow$



Allora l'insieme A è costituito dalle x per cui la retta orizzontale passante per $(0,x)$ è sotto il grafico di $y^2+\alpha$.

Il sup (che è anche un massimo) di A è pari ad $\boxed{\alpha}$

(3)

(a) $$\frac{A^n}{n^{\ln(n)}} = \frac{e^{n\ln(A)}}{e^{\ln(n^{\ln(n)})}} = \frac{e^{n\ln(A)}}{e^{\ln^2(n)}} = e^{n\ln(A)-\ln^2(n)}$$

dato che $n\ln(A) - \ln^2(n) = n\Big(\ln(A) - \underbrace{\frac{\ln^2(n)}{n}}_{\substack{\downarrow \\ 0}}\Big) \to +\infty$ (limite notevole)

segue che $\dfrac{A^n}{n^{\ln(n)}} \to +\infty$

(b)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^A(1+\ln(n)) - \ln(n)}{\ln(n^A) + B} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^A(1+\ln(n)) - \ln(n)}{A\ln(n) + B} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^A(1+x) - x}{Ax + B} = -\frac{1}{A}$$

(cambio di variabile $x = \ln(n)$
è chiaro che $n \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty$)

perché $\frac{\ln^A(1+x)}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ (limite notevole / Hôpital)

(4)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos(2x)}{e^{-2x^2}}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x^2)}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(2x)) + 2x^2}{1-\cos(x^2)}}$$

$$\ln(\cos(2x)) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^4)\right) =$$

$$\ln\Big(1 \underbrace{- 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}_{y}\Big) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) =$$

$$-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(-2x^2+o(x^2)\right)^2+o\left(\left(-2x^2+o(x^2)\right)^2\right)=$$

$$-2x^2+\frac{2}{3}x^4-2x^4+o(x^4)=-2x^2-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\quad\Rightarrow$$

$$\frac{\ln\left(\cos(2x)\right)+2x^2}{1-\cos(x^2)}=\frac{\cancel{-2x^2}-\frac{4}{3}x^4+o(x^4)\cancel{+2x^2}}{\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}\longrightarrow-\frac{8}{3}$$

e alla fine il limite di partenza fa $\boxed{e^{-8/3}}$

(5) $y''+y=\cos(x)\qquad y(0)=y'(0)=0$

Passiamo alla forma complessa:

$$y''+y=e^{ix}$$

L'eq. omogenea ha soluzioni $c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}$ per cui il dato e^{ix} è soluzione dell'omogenea. Allora possiamo cercare una sol. particolare del tipo $\bar{y}(x)=cxe^{ix}$ con c costante.

Facendo i calcoli:

$\bar{y}'(x) = c e^{ix} + c i x e^{ix}$, $\bar{y}''(x) = c i e^{ix} + c i e^{ix} - c x e^{ix}$

$\Rightarrow \quad \bar{y}'' + y = 2ci e^{ix} \cancel{- c x e^{ix}} \cancel{+ c x e^{ix}} \Rightarrow$ Posso prendere $c = \frac{1}{2i}$

e dunque trovo $\bar{y}(x) = \frac{x}{2i} e^{ix} = \frac{x\cos(x)}{2i} - \frac{x\sin(x)}{2}$

Tornando alla forma reale, dato che $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$, deduco che $\tilde{y}(x) = \mathrm{Re}(\bar{y}(x)) = \frac{x}{2}\sin(x)$ è sol. particolare dell'eq. iniziale.

Tale $\tilde{y}$ verifica $\tilde{y}(0) = 0$, $\tilde{y}'(x) = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{x}{2}\cos(x) \Rightarrow \tilde{y}'(0) = 0$

e quindi la soluzione cercata è proprio $\boxed{y(x) = \frac{x}{2}\sin(x)}$

(se si considera la soluzione generale $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{x}{2}\sin(x)$ e si impongono le condiz. iniz. si trova $c_1 = c_2 = 0$).

Allora

- $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ $\boxed{\text{NO}}$ (il lim a $+\infty$ non esiste)

- $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \rightarrow \boxed{SÌ}$

- $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{x\cos(x)}{2}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(\pi/2)}{2} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{NO}$

- $y(-x) = \frac{(-x)}{2}\sin(-x) = \frac{(-x)(-\sin(x))}{2} = \frac{x\sin(x)}{2} = y(x) \rightarrow \boxed{SÌ}$

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{1+n^{A\alpha-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}+n^{(A-1)\alpha-1}}$$

Si vede facilmente che la serie converge se e solo se $^{(*)}$ uno tra i due esponenti di n al denominatore è >1, cioè se

$-\alpha > 1$ oppure $(A-1)\alpha - 1 > 1$ $\Leftrightarrow$ $\alpha \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]\frac{2}{A-1}, +\infty\right[$

(*) in effetti $\frac{1}{n^{-\alpha}+n^{(A-1)\alpha-1}} \simeq \frac{1}{n^{\beta}}$ dove $\beta = \max\left(-\alpha, (A-1)\alpha - 1\right)$

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+A^2)(x+A)}\,dx$

Per eliminare A pongo $x = Ay$ $\longrightarrow$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{A}{(A^2y^2+A^2)(Ay+y)}\,dy =$

$\displaystyle\frac{1}{A^2}\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2+1)(y+1)}$. Operiamo la riduzione in fratti semplici

$$\frac{1}{(y^2+1)(y+1)} = \frac{ay+b}{y^2+1} + \frac{c}{y+1} = \frac{a(y^2+y)+b(y+1)+c(y^2+1)}{(y^2+1)(y+1)}$$

da cui

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + b = 0 \\ b + c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a \\ a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1/2 \\ b = 1/2 \\ c = 1/2 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2A^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-y+1}{y^2+1} + \frac{1}{y+1}\right)dy = \frac{1}{2A^2}\left[-\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \operatorname{arctg}(y) + \ln(1+y)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2A^2}\left[\ln\frac{1+y}{\sqrt{1+y^2}} + \operatorname{arctg}(y)\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2A^2}\left(0 - 0 + \frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4A^2}$$

(8) $\quad (x+1)\,y' = 2y - \dfrac{3x+3}{x+3} \qquad y(0) = y_0 \quad , \; x > -1$

Messo in forma normale

$$y' = \frac{2}{x+1}\,y - \frac{3}{x+3}$$

da cui

$$y(x) = (x+1)^2 \left(y_0 - 3 \int_0^x \frac{dt}{(t+3)(t+1)^2} \right)$$

Per calcolare l'integrale facciamo la riduzione in fratti semplici.

$$\frac{1}{(t+3)(t+1)^2} = \frac{a}{t+3} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t+1)^2} = \frac{a(t^2+2t+1) + b(t^2+4t+3) + c(t+3)}{(t+3)(t+1)^2}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + 4b + c = 0 \\ a + 3b + 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 2b + c = 0 \\ 2b + 3c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 2b + c = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4 \\ c = 1/2 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$y(x) = (x+1)^2 \left(y_0 - \frac{3}{4} \int_0^x \left(\frac{1}{t+3} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2} \right) dt \right) = $$

$$(x+1)^2\left(y_0-\frac{3}{4}\left[\ln\left(\frac{t+3}{t+1}\right)-\frac{2}{t+1}\right]_0^x\right)=$$

$$\boxed{(x+1)^2\left(c-\frac{3}{4}\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)+\frac{3}{2(x+1)}\right)\qquad \text{dove } c=\frac{3}{4}\ln(3)-\frac{3}{2}+y_0}$$

$$=c(x+1)^2-\frac{3}{4}(x+1)^2\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)+\frac{3}{2}(x+1)$$

Facciamo i limiti in -1 e a $+\infty$:

$$\lim_{x\to-1^+}y(x)=\lim_{x\to-1^+}(x+1)\Big(\underbrace{c(x+1)}_{\to 0}-\frac{3}{4}\underbrace{(x+1)\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)}_{\to 0}+\frac{3}{2}\Big)=0^+$$

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\begin{cases}+\infty & \text{se } c>0 \iff y_0>\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\ln(3)=:\overline{y}\\ 3/2 & \text{se } c=0\iff y_0=\overline{y}\\ -\infty & \text{se } c<0\iff y_0<\overline{y}\end{cases}$$

Nel caso $c=0$ il limite si può fare così:

$$\frac{3}{4}(x+1)^2\left(\frac{2}{x+1}-\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)\right)=\frac{3}{4}(x+1)^2\left(\frac{2}{x+1}-\ln\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\right)=$$

$$\frac{3}{4}(x+1)^2\left(\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x+1}\right)^2+o\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right)\right)=$$

$$\frac{3}{4}(x+1)^2\left(\frac{2}{(x+1)^2}+o\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\right)\right)=\frac{3}{2}+o(1)\rightarrow\frac{3}{2}$$

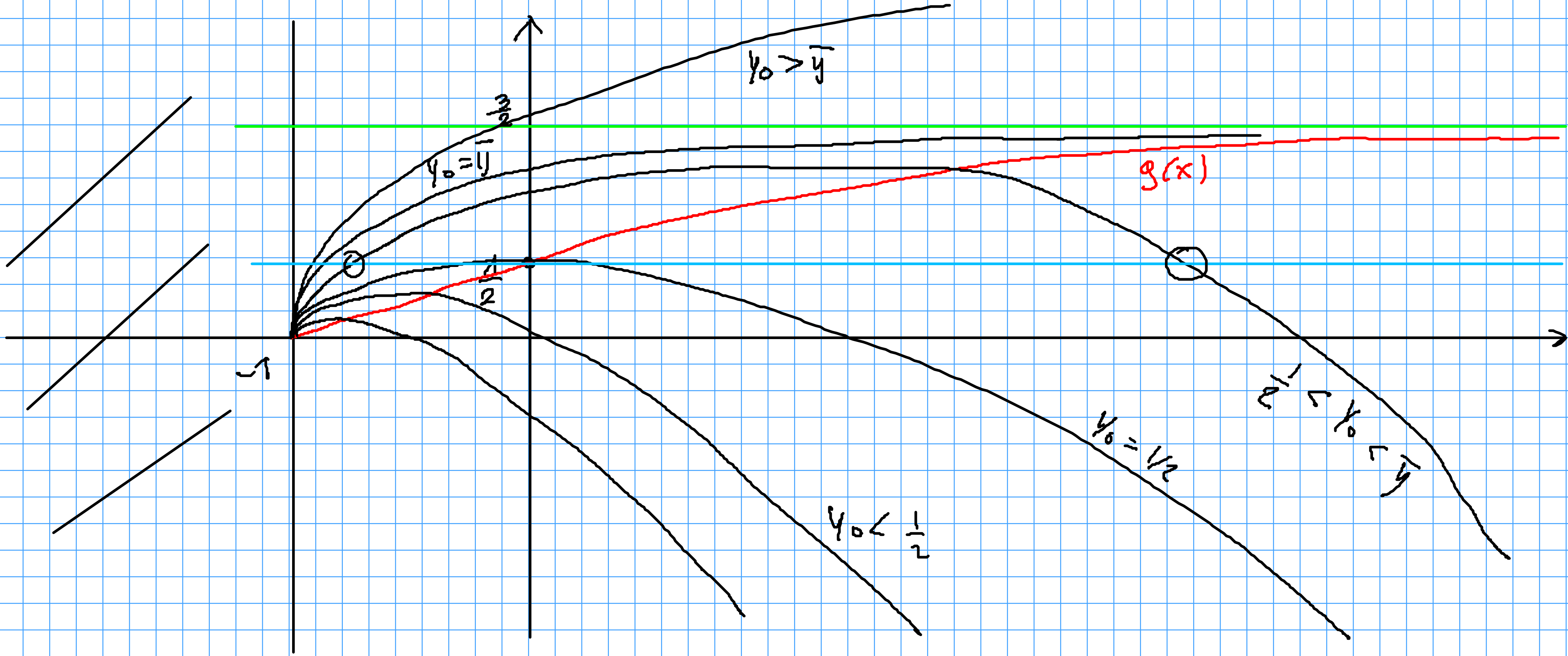
Per la monotonia studiamo il segno di $\quad 2y-\frac{3x+3}{x+3} \quad (x>-1)$

Tale quantità è positiva se $\quad y>\frac{3(x+1)}{2(x+3)}=:g(x)$

Se tracciamo il grafico di $g(x)$ troviamo un'iperbole con

$g(-1)=0$, $g(0)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\frac{3}{2}$.

Se mettiamo nei grafici l'informazione che y cresce dove $y>g(x)$ decresce dove $y<g(x)$ otteniamo i seguenti grafici (g è la curva rossa)



I grafici mostrano anche che, perché $y(x)$ incontri due volte la retta $y = \frac{1}{2}$, bisogna che $\frac{1}{2} < y_0 < \bar{y} \left(= \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \ln(3)\right)$