Eq. diff. Poniamo alla forma normale

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2}{x}\, y - \dfrac{1}{x+2} \\ y(1) = y_0 \end{cases} \qquad (x>0)$$

SOLUZIONE

$$y(x) = x^2 \left(y_0 - \int_1^x \frac{dt}{t^2(t+2)} \right) dt = ⊛$$

$$\frac{1}{t^2(t+2)} = \frac{A}{t^2} + \frac{B}{t} + \frac{C}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t^2+2t) + Ct^2}{t^2(t+2)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ A + 2B = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \iff A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{4} \quad C = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$⊛ = x^2 \left(y_0 - \int_1^x \left(\frac{1}{2}\frac{1}{t^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\frac{1}{t+2} \right) dt \right) =$$

$$x^2 \left(y_0 - \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{4} \ln\left|\frac{t+2}{t}\right| \right]_1^x \right) = \boxed{x^2 \left(C + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \right)}$$

dove $\boxed{C = y_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln(3)}$

LIMITI

- $\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2\left(c + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)\right) =$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\underset{\downarrow\ 0}{cx} + \underset{\downarrow\ 1/2}{\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{x}{4}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)}_{\downarrow\ 0}\right) = \boxed{0^+}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c>0 \iff y_0 > \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(3) =: \bar{y} \\ \frac{1}{2} & \text{se } c=0 \iff y_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(3) \\ -\infty & \text{se } c<0 \iff y_0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(3) \end{cases}$$

Nel caso $c=0$ si può fare così: (usando lo sviluppo di Taylor di $\ln(1+y)$)

$$y(x) = x^2\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) = x^2\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$x^2\left(\cancel{\frac{1}{2x}} - \cancel{\frac{1}{2x}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{1}{2} + o(1) \longrightarrow 1/2$$

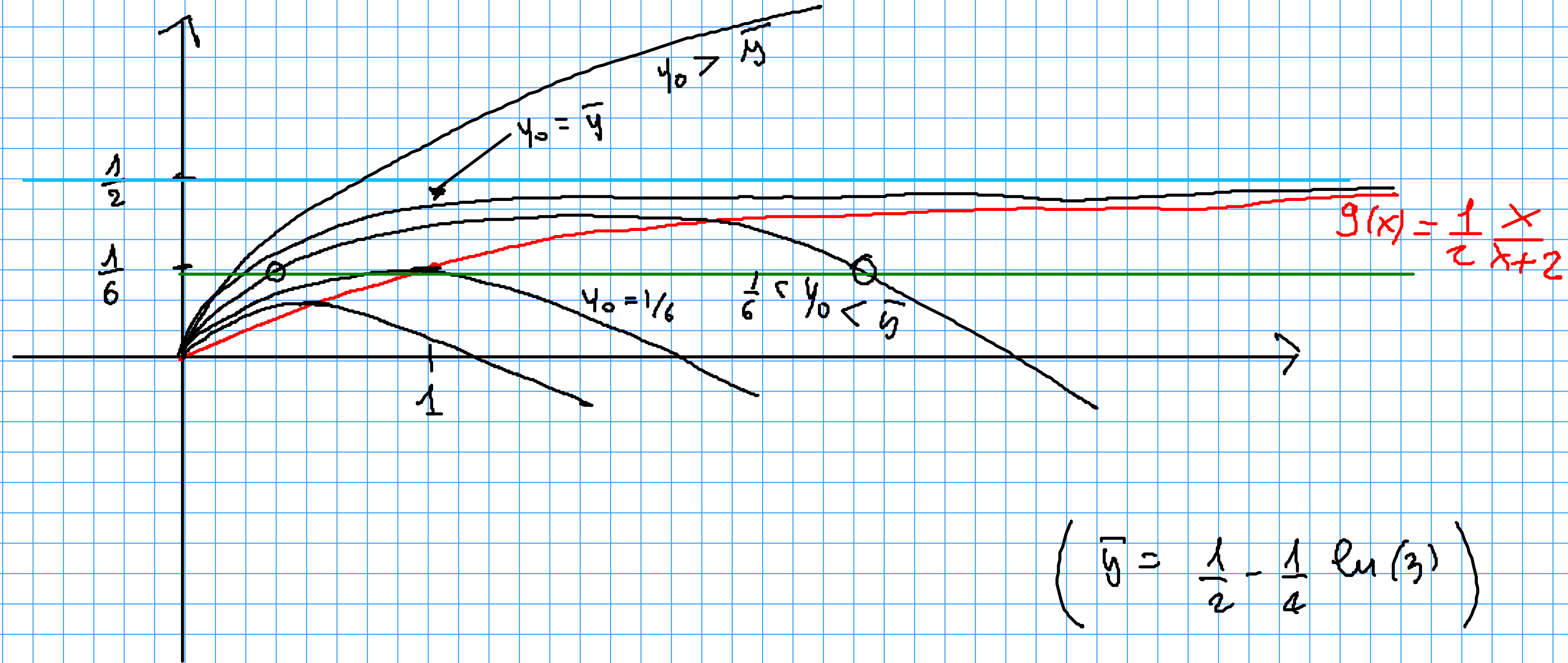
MONOTONIA E GRAFICI

Studiamo il segno di y'

$$y' > 0 \iff x y' > 0 \iff 2y - \frac{x}{x-2} > 0 \iff y > \frac{1}{2}\frac{x}{x+2} =: g(x)$$

(e lo stesso mettendo $<$ o $=$)

La $g(x)$ è un'iperbole (vedi grafico in rosso) e $y(x)$ cresce/decresce a seconda che $y(x) > g(x)$ / $y(x) < g(x)$. Allora le y sono:



$$\left(\bar{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(3)\right)$$

ULTIMA DOMANDA: DATO CHE $g(1) = \frac{1}{6}$, si vede dai grafici che per $y_0 < \frac{1}{6}$ $y(x) = \frac{1}{6}$ NON HA SOLUZIONI — per $y_0 = \frac{1}{6}$ c'è solo la soluzione $x = 1$, per $\frac{1}{6} < y_0 < \bar{y}$ ci sono due soluzioni, mentre per $y_0 \geq \bar{y}$ ce n'è una sola.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{6} < y_0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln(3)}$$