1 $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ per $x \in [-1, 1]$. Allora

1.1 $f$ è continua (composizione di funzioni continue), $[-1,1]$ è un intervallo chiuso. Per Weierstrass $f$ ha max e min

$\Rightarrow$ $f$ $\boxed{\text{è}}$ limitata

1.2 $f$ è pari dato che $\sqrt[3]{|-x|} = \sqrt[3]{|x|}$ e quindi $\boxed{\text{non è}}$ dispari.

(altrimenti sarebbe costante).

1.3 $f$ $\boxed{\text{non}}$ è derivabile perché non è derivabile in zero.

Infatti
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{|x|}}{x} \begin{cases} \to +\infty & \text{se } x \to 0^+ \\ \to -\infty & \text{se } x \to 0^- \end{cases}$$

1.4 $f$ $\boxed{\text{non}}$ è iniettiva perché è pari e quindi, ad esempio,

$f(-1) = f(1)$.

2 La successione $a_n = 1 + \frac{A}{n}$, definita per $n \geq 1$, è decrescente $(A > 0)$.

Ne segue che $\sup a_n = \max a_n = a_1 = \boxed{1 + A}$

(mentre $\inf a_n = \lim_{n \to +\infty} a_n = 1$ - ma questo non c'entra)

3

3.1 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2+1}\,\ln(1+An)}{n} = \boxed{0}$$

Infatti per i limiti notevoli $\sqrt[n]{n^2+1} \to 1$ e $\frac{\ln(1+An)}{n} \to 0$

- Più precisamente

$$\sqrt[n]{n^2} \le \sqrt[n]{n^2+1} \le \sqrt[n]{2n^2} = \sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 1$$

mentre $$0 \le \frac{\ln(1+An)}{n} \le \frac{\ln(2An)}{n} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{il logaritmo "perde"}}}{\frac{\ln(n)}{n}} + \frac{\ln(2A)}{n} \to 0$$

3.2

$$\frac{1-\cos(n) + A^{n+1}}{n^2 + A^n + 1} = \frac{A^{n+1}}{A^n} \, \frac{\frac{1-\cos(n)}{A^{n+1}} + 1}{\frac{n^2+1}{A^n} + 1} = A \, \frac{1+o(1)}{1+o(1)}$$

tende ad $\boxed{A}$

4.

$$\frac{e^{Ax^2} - \sqrt{1+2Ax^2}}{x^2(\cos(x)-1)} =$$

$$\frac{\cancel{1} + \cancel{Ax^2} + \frac{A^2x^4}{2} + o(x^4) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}2Ax^2} - \frac{1}{8}(2Ax^2)^2 + o(x^4)\right)}{x^2\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1}\right)} =$$

$$\frac{\frac{A^2}{2}x^4 + \frac{A^2}{2}x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{A^2x^4 + o(x^4)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^4)} \to \boxed{-2A^2}$$

5

$$f(x) = (x-1)\,e^{\frac{x}{1-x^2}}$$

Dominio : $1-x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

Limiti • se $x \to -\infty$ $f(x) \to \boxed{-\infty}$ infatti

$x-1 \to -\infty$ , $\frac{x}{1-x^2} \to 0 \Rightarrow e^{\frac{x}{1-x^2}} \to 1$

• se $x \to +\infty$ $f(x) \to \boxed{+\infty}$ $(x-1 \to +\infty)$

• Se $x \to -1^-$ $\quad f(x) \to \boxed{-\infty}$ infatti

$(x-1) \to -2$ , $\quad \dfrac{x}{1-x^2} \to \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{1-x^2}} \to +\infty$

• se $x \to -1^-$ $\quad f(x) \to \boxed{0^-}$ infatti

$(x-1) \to -2 \quad \dfrac{x}{1-x^2} \to \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{1-x^2}} \to 0^+$

• se $x \to 1^-$ $\quad f(x) \to \boxed{-\infty}$

$(x-1) \to 0 \quad \dfrac{x}{1-x^2} \to \dfrac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow e^{\frac{x}{1-x^2}} \to +\infty$

FORMA INDERMINATA. Ricordiamo che $\dfrac{e^y}{y} \to +\infty$ se $y \to +\infty$

Allora

$$(x-1)\,e^{\frac{x}{1-x^2}} = (x-1)\,\frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{x}{1-x^2} =$$

$$\frac{x(x-1)}{1-x^2}\,\frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\frac{x}{1-x^2}} = \frac{-x}{1+x}\,\frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{\frac{x}{1-x^2}} \longrightarrow -1 \cdot +\infty = -\infty$$

• se $x \to 1^+$ $\quad f(x) \to \boxed{0^+}$ (è simile al caso $-1^+$)

**Derivata** se $x \neq \pm 1$ $f$ è derivabile e vale

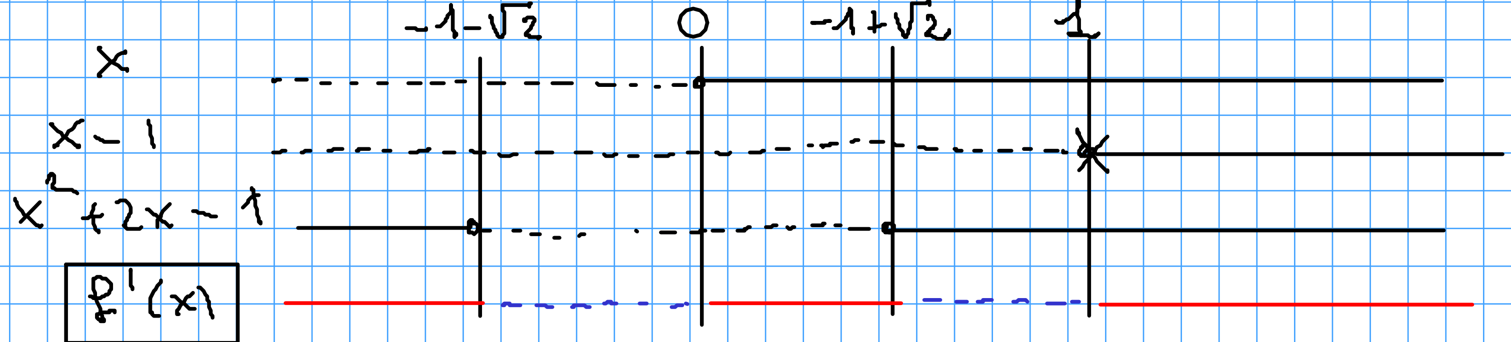
$$f'(x) = e^{\frac{x}{1-x^2}} + (x-1)\,\frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2}\,e^{\frac{x}{1-x^2}} =$$

$$e^{\frac{x}{1-x^2}}\left(1 - \frac{1+x^2}{(1-x)(1+x)^2}\right) =$$

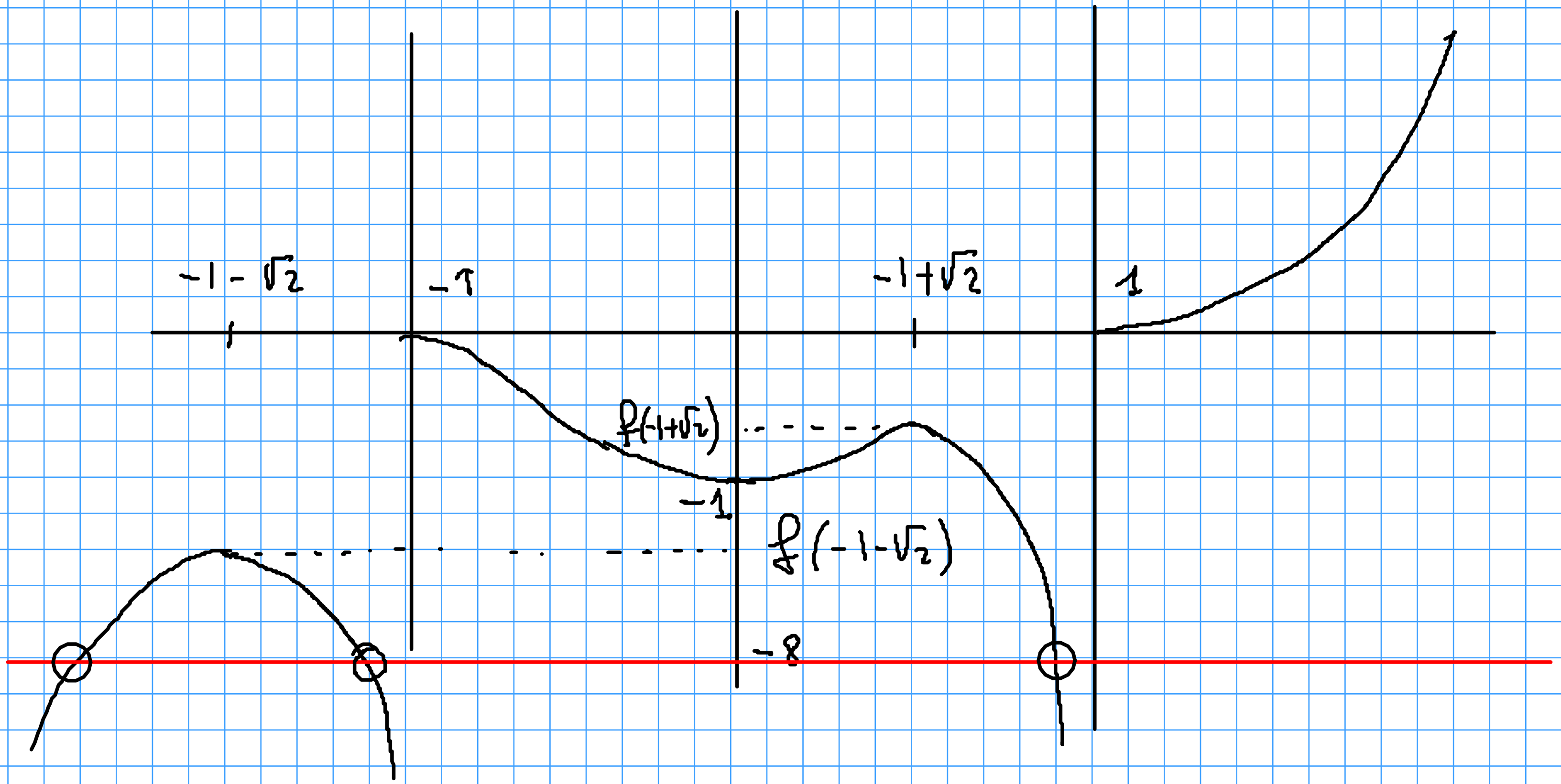
$$e^{\frac{x}{1-x^2}}\left(\frac{\cancel{1}+x-x^2-x^3-\cancel{1}-x^2}{(1-x)(1+x)^2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{1-x^2}}}{(1-x)(1+x)^2}\,x\left(-x^2-2x+1\right)$$

**Monotonia** Il segno di $f'$ dipende da $\dfrac{x(x^2+2x-1)}{x-1}$

(perché il resto è sempre positivo). Il trinomio $x^2+2x-1$ ha come radici $-1 \pm \sqrt{2}$. Allora



Da cui si ricava il seguente grafico




**NOTA**: si potrebbero calcolare i limiti di $f'$ in $-1^+$ e in $1^+$ e si troverebbe <u>zero</u>

Si ha $f(0) = -1$ mentre

$$f(-1-\sqrt{2}) = (-1-\sqrt{2}-1)\, e^{\frac{-1-\sqrt{2}}{1-(1+\sqrt{2})^2}} = (-2-\sqrt{2})\, e^{\frac{-1-\sqrt{2}}{1-(1+2+2\sqrt{2})}} =$$

$$= (-2-\sqrt{2})\, e^{\frac{-1-\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}} = -(2+\sqrt{2})\, e^{-1/2} = -(2+\sqrt{2})\sqrt{e}$$

Allora $f(-1-\sqrt{2}) < f(0) \iff 1 < (2+\sqrt{2})\sqrt{e} \Leftarrow 1 < 2+\sqrt{2}$ <u>VERA</u>

Inoltre

$$f(-1-\sqrt{2}) = -(2+\sqrt{2})\sqrt{e} > -(2+2)\sqrt{4} = -8$$

Dunque la retta $y=-8$ taglia <u>tre</u> volte il grafico di $f$ e allora l'equazione $f(x)+8=0$ ha $\boxed{\text{tre soluzioni}}$

$x_1, x_2, x'_2$ con $x_1 < -1-\sqrt{2} < x_2 < -1$, $-1+\sqrt{2} < x_3 < 1$

Notiamo infine che (NON ERA RICHIESTO) la retta $y = x-1$ è un asintoto obliquo dato che $f(x) = (x-1)\, e^{\frac{x}{1-x^2}}$ e che

$e^{\frac{x}{1-x^2}} \to 1$ ( $1^-$ se $x \to +\infty$, $1^+$ se $x \to -\infty$). Quindi il grafico di $f$ è asintotico alla retta $y = x-1$ come nel grafico sotto.