Ingegneria Aerospaziale. Corso di Analisi Matematica 1.
Compito del 16 febbraio 2009

1. Se $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) := x^3 - x^2$, allora (1/-1 punti a risposta)
   (a) $-\frac{4}{27}$ è di minimo per f;
   (b) $f \leq 0$;
   (c) f ha due punti di massimo;
   (d) f ha tre punti stazionari.

2. Se $a_n = n^2 - 2$ allora tra le seguenti successioni indicare quella che NON è estratta da (a_n) (2/-.5 punti) :
   (a) $b_n = n^4 - 2$,
   (b) $b_n = 4n^4 - 2$,
   (c) $b_n = n^2 + 2n$,
   (d) $b_n = n^2 + 4n + 2$,
   (e) $b_n = n^4 + 2n^2 - 1$.

3. Si calcolino i seguenti limiti di successioni (2 punti ciascuno)
   (a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{4}{n^2}\right)^n$ (b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^n - n^{n+1}}{2^n + n^n}$
   (c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt[n]{5} - 1)}{n + 1}$ (d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + n}$

4. Calcolare il limite (6 punti – DA SVOLGERE)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos(x^2))}{\cos(x) - \sqrt[4]{1 - 2x^2}}$$

5. In ognuno dei casi seguenti si indichi se la serie converge assolutamente (AC), converge ma non assolutamente (C) oppure non converge (NC) (punti 1.5/-0.75 per ognuna).
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n^2]{3} - 1)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi)}{n}$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n^2}{n^4 + 1}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n + 1}$

6. Sia $f(x) := 1 + x - x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$. Posto $g(x) := \dfrac{1}{f(x)}$ allora $g''(0)$ vale: (punti 2/-0.5):
$$(a)\ 0, \quad (b)\ 1, \quad (c)\ 2, \quad (d)\ -1, \quad (e)\ -2.$$

7. Si calcoli il valore del seguente integrale improprio (se esiste) (punti 4):
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(25 + x^2)^2}\, dx$$

8. Si consideri l'equazione differenziale (punti 8 in tutto DA SVOLGERE)
$$y' = \frac{2}{x + 4} y + \frac{x + 4}{1 - x^2} \qquad -1 < x < 1.$$
   (a) Per ogni y_0 in $\mathbb{R}$ si trovi l'espressione analitica della soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = y_0$.
   (b) Si calcolino, al variare di y_0, i limiti di $y(x)$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 1^-$.
   (c) Si traccino i grafici delle soluzioni più signicative (sempre al variare di y_0), mettendone in evidenza gli intervalli di monotonia.
   (d) Si trovi per quali valori di y_0 (se ce ne sono) la soluzione $y(x)$ è strettamente crescente in $]-1, 1[$.