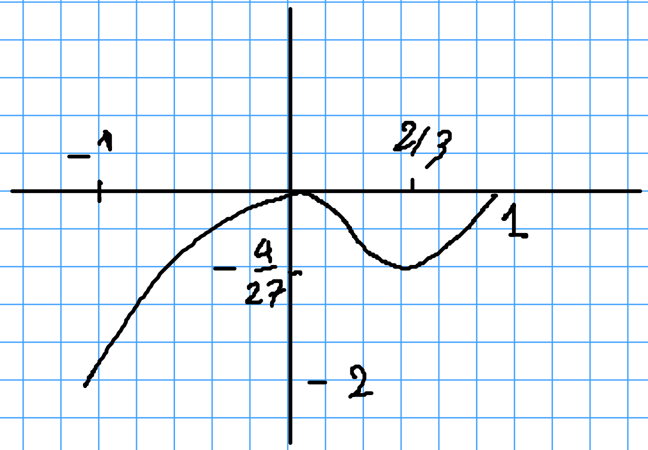
Ing. Aerospaziale – Compito del 16 febbraio 2009.

(1) $f(x) = x^3 - x^2$ su $[-1,1]$. Allora $f(-1) = -2$ $\quad f(1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x-2)$; $f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 2/3$.

$\Rightarrow$



$f(2/3) = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{4}{27}$

ALLORA

(a) $\min f = \boxed{-2}$ $\Rightarrow$ FALSA

(b) $\max f = \boxed{0}$ $\Rightarrow$ VERA

(c) 0 e -1 pti di max $\Rightarrow$ VERA

(d) solo due pti staz. $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ $\Rightarrow$ FALSA

(2) (a) $b_n = a_{n^2}$ $\quad$ (b) $b_n = a_{2n^2}$ $\quad$ (d) $b_n = a_{n+2}$

(e) $b_n = a_{n+1}$. L'unica che non è estratta è la (c) dato che per $n = 0$ $b_n = 0$, mentre a_n non fa mai zero: $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $a_2 = 2$, $a_n \geq 2$ se $n \geq 2$

3

(a) $\left(1+\frac{4}{n^2}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} = e^{\frac{4}{n}\frac{n^2}{4}\ln\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} \to e^0 = \boxed{1}$

dato che $\frac{n^2}{4}\ln\left(1+\frac{4}{n^2}\right) \to 1$

(b) $\frac{5^n - n^{n+1}}{2^n + n^n} = \frac{n^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{\frac{5^n}{n^{n+1}} - 1}{\frac{2^n}{n^n} + 1} = n \, \frac{\frac{1}{n}\frac{5^n}{n^n} - 1}{\frac{2^n}{n^n} + 1} \to \boxed{-\infty}$

dato che $\frac{5^n}{n^n} \to 0$ e pure $\frac{2^n}{n^n} \to 0$

(c) $\frac{n^2}{n+1}\left(\sqrt[n]{5} - 1\right) = \frac{n}{n+1} \, \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(5)} - 1}{\frac{1}{n}\ln(5)} \ln(5) \to \boxed{\ln(5)}$

perché se $a_n \to 0$ $\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$

(d) $\sqrt[n]{3^n + 5^n + n} = 5\sqrt[n]{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 + \frac{n}{5^n}} \to \boxed{5}$

perché $\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0$ e $\frac{n}{5^n} \to 0$

④ Usiamo Taylor:

- $$1-\cos(x^2) = 1-\left(1-\frac{(x^2)^2}{2}+o(x^4)\right) = \frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

- $$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)$$

- $$\sqrt[4]{1-2x^2} = (1-2x^2)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}(-2x^2)+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2}(-2x^2)^2+o(x^4) =$$
$$1-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x^4+o(x^4)$$ ALLORA

- $$\cos(x)-\sqrt[4]{1-2x^2} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\left(1-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x^4+o(x^4)\right) =$$
$$\left(\frac{1}{24}+\frac{3}{8}\right)x^4+o(x^4) = \frac{5}{12}x^4+o(x^4)$$ E DUNQUE

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x^2))}{\cos(x)-\sqrt[4]{1-2x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{2}+o(x^4)}{\frac{5}{12}x^4+o(x^4)} = \frac{12}{5}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

⑤ (a) $a_n = \sqrt[n^2]{3} - 1 = e^{\frac{1}{n^2}\ln(3)} - 1 = \frac{\ln(3)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente $\left(\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ conv.}\right)$ $\boxed{AC}$

(b) $a_n = \frac{\sin(n\pi)}{n} = 0$ ($\sin(n\pi)$ è sempre zero) $\boxed{AC}$

(c) $a_n = \frac{\sin(n) - n^2}{n^4 + 1} = -\frac{n^2}{n^4+4}(1+o(1))$. Dunque $a_n \leq 0$

se n è grande e $a_n \simeq \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ $\boxed{AC}$

(d) $a_n = \frac{\sqrt[n]{n}}{n+1}$, dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$ si ho $a_n \simeq \frac{1}{n+1}$

(e $a_n \geq 0$) $\Rightarrow \sum a_n$ diverge $\boxed{NC}$

(6) Ricordiamo che $\dfrac{1}{1+y} = (1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 + o(y^2)$

Usando $y = x - x^2 + o(x^2)$ viene

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1+x-x^2+o(x^2)} = 1 - \left(x - x^2 + o(x^2)\right) + \left(x + o(x)\right)^2 + o(x^2) =$$

$1 - x + 2x^2 + o(x^2)$. Allora $f(0)=1$, $f'(1) = -1$, $\dfrac{f''(0)}{2} = 2$

$\Rightarrow f''(0) = 4 \Rightarrow$ la risposta corretta è $\boxed{\text{NDP}}$

(7) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(25+x^2)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{x}{(25+x^2)^2}\,dx = \Bigg(\text{per parti; notando che } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{25+x^2}\right) = \frac{-2x}{(25+x^2)^2} \Bigg)$$

$$= \left[x \cdot \frac{-1/2}{25+x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{25+x^2} = 0 + \frac{1}{50}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{50}\left[5\,\text{arctg}\left(\frac{x}{5}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{10}$$

8

$$y' = \frac{2}{x+4}\, y + \frac{x+4}{1-x^2} \qquad y(0)=y_0 \qquad -1 < x < 1$$

Applico la formula risolutiva

$$y(x) = \left(\frac{x+4}{4}\right)^2 \left\{ y_0 + \int_0^x \left(\frac{4}{s+4}\right)^2 \frac{s+4}{1-s^2}\, ds \right\} =$$

$$(x+4)^2 \left\{ \frac{y_0}{16} - \int_0^x \frac{ds}{(s+4)(s-1)(s+1)} \right\} = \qquad \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+1}$$

$$(x+4)^2 \left\{ \frac{y_0}{16} - \int_0^x \left(\frac{1}{15}\,\frac{1}{s+4} + \frac{1}{10}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{6}\,\frac{1}{s+1} \right) ds \right. =$$

$$(x+4)^2 \left\{ \frac{y_0}{16} - \frac{1}{30} \left[\ln \frac{(s+4)^2\, |s-1|^3}{|s+1|^5} \right]_0^x \right\} =$$

$$= (x+4)^2 \left\{ C + \frac{1}{30} \ln\left(\frac{(x+1)^5}{(x+4)^2 (1-x)^3} \right) \right\}$$ dove $C = \frac{y_0}{16} + \frac{1}{15}\ln(4)$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\lim_{x \to -1^+} y(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} y(x) = +\infty$$

Per la monotonia poniamo $F(x,y) = \frac{2}{x+4}\,y + \frac{x+4}{1-x^2}$

Allora $F(x,y)=0 \iff y = \frac{(x+4)^2}{2(x^2-1)} =: g(x)$

$(-1 < x < 1)$

Studiamo $g(x)$: $\lim_{x\to\pm1} g(x) = -\infty$

$$g'(x) = \frac{\cancel{2}(x+4)(x^2-1) - \cancel{2}x\,(x+4)^2}{\cancel{2}(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{x^3} - x + 4x^2 - 4 - \cancel{x^3} - 8x^2 - 16x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - 17x - 4}{(x^2-1)^2}$$

$g'(x) = 0 \iff x = -4$ o $x = -1/4$

l'unico che ci interessa è $x = -\frac{1}{4}$ e $g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{2}$.

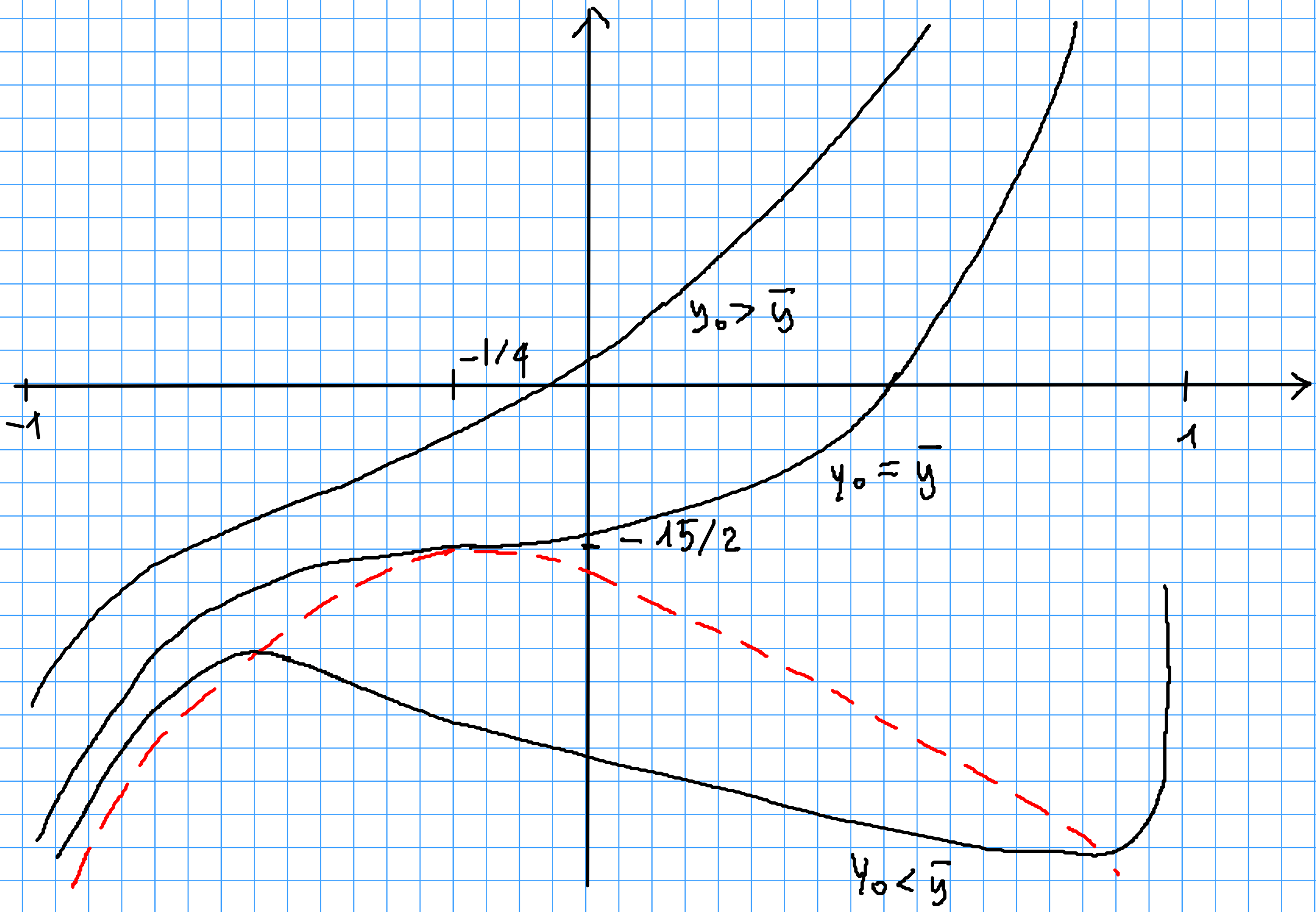
Per l'equazione $y' = F(x,y)$ si ha che

$y(x)$ crescente $\iff y(x) > g(x)$

$y(x)$ decrescente $\iff y(x) < g(x)$

$\Rightarrow$ (il grafico di g è tratteggiato in rosso)

da cui si ottengono i seguenti grafici



Nel grafico sopra indicato $\bar{y}$ è il valore di y_0 per cui la corrispondente soluzione y ha la proprietà $y(-1/4) = -15/2$.

Dal quanto sopra si vede che y è strettamente crescente

$\Longleftrightarrow \quad y \geq \bar{y}$