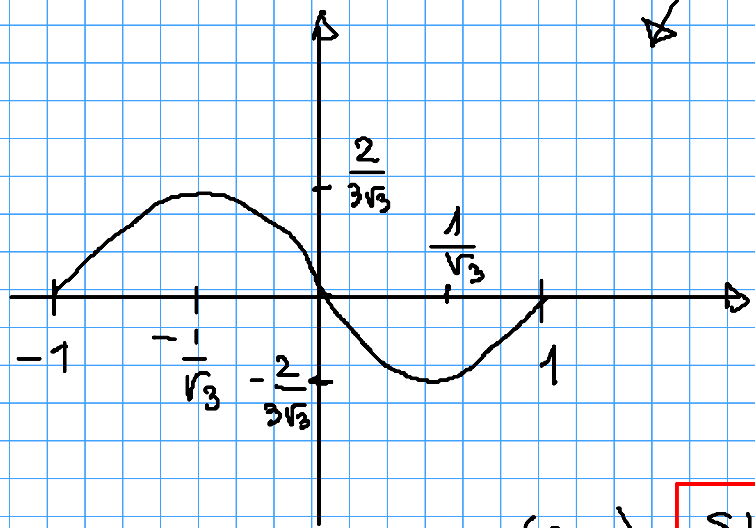
Soluzioni del compito di Analisi I del 26/01/2009

① $f(x) := x^3 - x$. Con un semplice studio di funzione si perviene al grafico seguente:



DUNQUE

(a) $\boxed{\text{NO}}$ perché anche $\frac{1}{\sqrt{3}}$ è punto di minimo relativo

(b) $\boxed{\text{SÌ}}$ $\sup f = \max f = \frac{2}{3\sqrt{3}} < +\infty$

(c) $\boxed{\text{SÌ}}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e 1 sono pti di max. rel.

(d) $\boxed{\text{SÌ}}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sono pti stazionari.

② $a_n = n^2$; allora

(b) $\to$ $b_n = n^2 + 4n + 4$ è estratta da (a_n), infatti $b_n = a_{n+2}$

(c) $\to$ $b_n = n^4 + 2n^2 + 1$ " " " ", infatti $b_n = a_{n^2+1}$

(d) $\to$ $b_n = n^4$ " " " ", infatti $b_n = a_{n^2}$

(e) $\to$ $b_n = 4n^4$ " " " ", infatti $b_n = a_{2n^2}$

Per esclusione la risposta è $\boxed{a}$. Per essere sicuri basta notare che se $b_n = n^2 + 2n + 2$ allora $b_0 = 2$, mentre $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_n \geq 4 \ \forall n \geq 2$ per cui a_n non può mai assumere il valore 2.

3

(a) $n\sqrt[n]{3} - 1 = \dfrac{e^{\frac{\ln(3)}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \dfrac{e^{\frac{\ln(3)}{n}} - 1}{\frac{\ln(3)}{n}} \cdot \ln(3) \to \boxed{\ln(3)}$

(b) $\sqrt[n]{3^n + n!} = \sqrt[n]{n!}\,\sqrt[n]{1 + 3^n/n!}$. Dato che, come ben noto, $\dfrac{3^n}{n!} \to 0$ e $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (Cesaro) si ha $\sqrt[n]{3^n + n!} \longrightarrow \boxed{+\infty}$

(c) $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}$; è noto che se $a_n \to +\infty$ $\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$ e quindi $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e$

Ne segue che $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \to \boxed{1}$

(d) $\dfrac{5^n + n^n}{2^n + n^{n+1}} = \dfrac{n^n}{n^{n+1}} \dfrac{5^n/n^n + 1}{2^n/n^{n+1} + 1} = \dfrac{1}{n} \dfrac{o(1) + 1}{o(1) + 1} \longrightarrow \boxed{0}$

(4) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2x)-\sqrt[4]{1-8x^2}}{x^4}$$

Ricordiamo che $\cos(y) = 1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o(x^4)$

$\sqrt[4]{1+y} = 1+\frac{y}{4}-\frac{3}{32}y^2+o(y^2)$. Ne segue:

$$\cos(2x)-\sqrt[4]{1-8x^2} = 1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{24}(2x)^4+o(x)+$$
$$-\left(1+\frac{1}{4}(-8x^2)-\frac{3}{32}(-8x^2)^2+o(x^2)\right) =$$
$$1-2x^2+\frac{2}{3}x^4-1+2x^2+6x^4+o(x^4) = \frac{20}{3}x^4+o(x^4)$$

e allora $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(2x)-\sqrt[4]{1-8x^2}}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{20}{3}x^4+o(x^4)}{x^4} = \boxed{\frac{20}{3}}$$

(5) (a) $\boxed{AC}$ perché $\left|\frac{\cos(n)-n}{n^3+1}\right| \le \frac{1+n}{n^3} = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}$

e $\sum_n \frac{1}{n^3} < +\infty$, $\sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

(b) $\boxed{C}$ In effetti $\cos(n\pi) = (-1)^n$ per cui

$$\left| \frac{\cos(n\pi)}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \to \text{serie divergente}$$

, però senza il valore assoluto viene $(-1)^n \frac{1}{n+1}$, che da origine a una serie convergente per Leibniz, dato che $n \to \frac{1}{n+1}$ decresce

(c) $\boxed{NC}$ Infatti $\cos(1/n) \geq 0$ e $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ per cui

$$a_n = \frac{\cos(1/n)}{n+1} \simeq \frac{1}{n+1} \quad \text{e} \quad \sum_n \frac{1}{n+1} = +\infty \Rightarrow \sum_n a_n = +\infty$$

(d) $\boxed{AC}$ $\left| \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right| = 1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + o(1)$. Il risultato segue allora dal fatto che $\sum_n \frac{1}{n^2} < +\infty$

6 $f(x) = 3x + e^{2x}$; $f(0) = 1 \Longleftrightarrow f^{-1}(1) = 0$.

$f'(x) = 3 + 2e^{2x}$, $f'(0) = 3 + 2 = 5$

Per il teorema dell'inversa

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{5} \to \boxed{C}$$

7

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(9+x^2)^2}\,dx = \circledast$$

Se sostituiamo $x^2 = y$, da cui $2x\,dx = dy$, otteniamo

$$\circledast = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\,\frac{dy}{(9+y)^2} = \frac{1}{2}\left[-(9+y)^{-1}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

8

$$y' = \frac{2}{x+3}\,y + \frac{x+3}{1-x^2}, \quad -1<x<1, \quad y(0) = y_0$$

Posto $A(x) = \int_0^x \frac{2}{t+3}\,dt$ si ha $A(x) = \ln\frac{(x+3)^2}{9} \Rightarrow$

$$y(x) = \frac{(x+3)^2}{9}\left(y_0 + \int_0^x \frac{t+3}{1-t^2}\,\frac{9}{(t+3)^2}\,dt\right) =$$

$$(x+3)^2\left(\frac{y_0}{9} - \int_0^x \frac{dt}{(t^2-1)(t+3)}\right) = (x+3)^2\left(\frac{y_0}{9} - \int_0^x \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{2}{t+1} + \frac{1}{t+3}\right)dt\right)$$

$$= (x+3)^2\left(\frac{y_0}{9} - \frac{1}{8}\left[\ln\left(\left|\frac{(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}\right|\right)\right]_0^x\right) = (x+3)^2\left(c - \frac{1}{8}\ln\left(\frac{(1-x)(x+3)}{(x+1)^2}\right)\right)$$

dove $c = \frac{y_0}{9} + \frac{1}{8}\ln(3)$

Allora

$$\lim_{x\to -1^+} y(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\to 1^-} y(x) = +\infty .$$

Per la monotonia poniamo $F(x,y) = \frac{2}{x+3}\, y + \frac{x+3}{1-x^2}$

$$F(x,y) = 0 \iff \frac{2}{x+3}\, y = \frac{x+3}{x^2-1} \iff y = \frac{1}{2}\,\frac{(x+3)^2}{x^2-1} =: g(x)$$

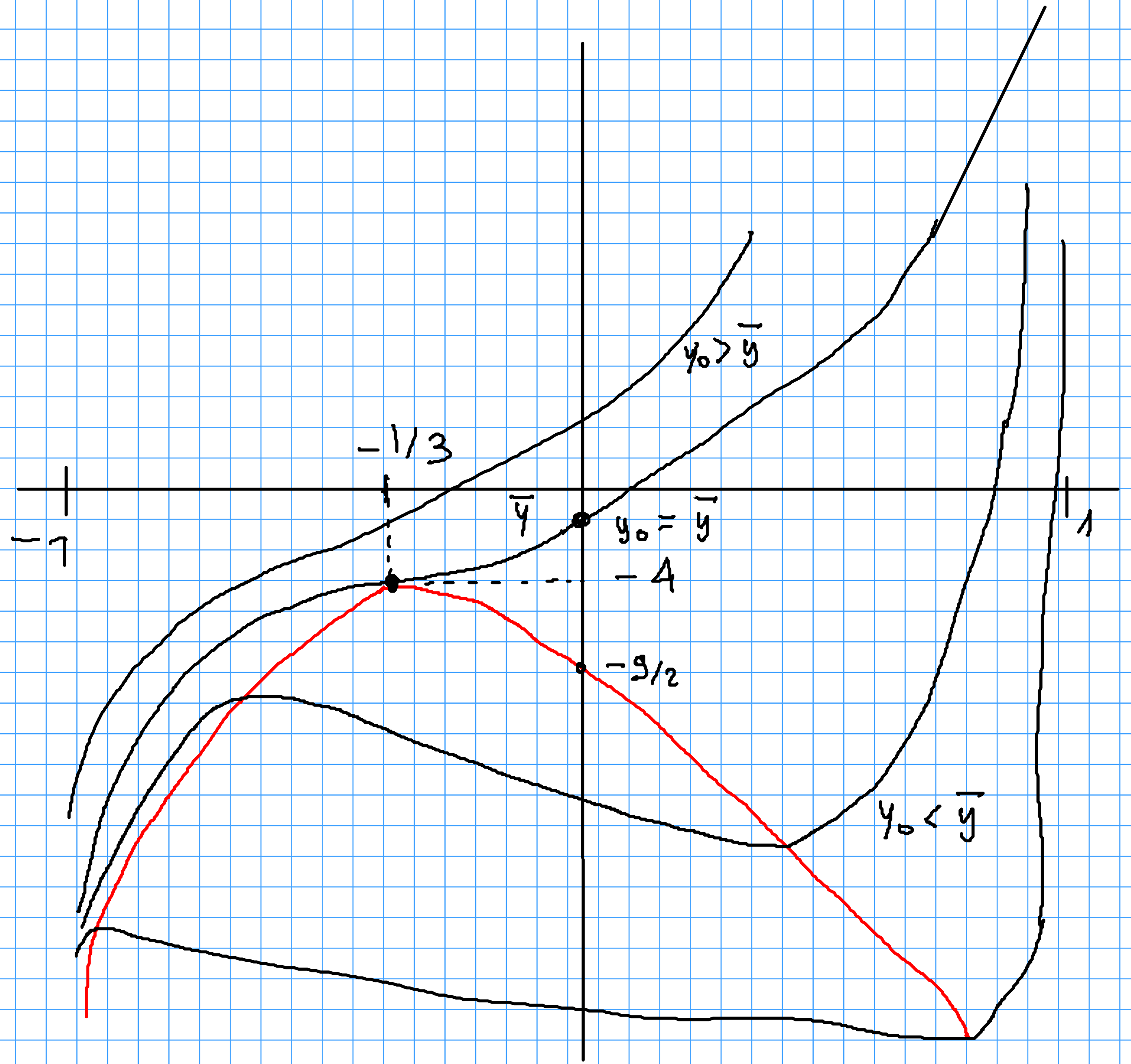
Facciamo uno studio di $g(x)$ in $[-1,1]$

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{2(x+3)(x^2-1) - (x+3)^2\, 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{(x+3)}{(x^2-1)^2}\left(x^2-1-x^2-3x\right) = -\frac{(x+3)(1+3x)}{(x^2-1)^2}$$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \iff x = -1/3$; $g(-\frac{1}{3}) = -4$. Se tracciamo il grafico di g (linea rossa) possiamo farci un'idea delle soluzioni, dato che y cresce in $x \iff y(x) > g(x)$ (e viceversa)

Si ottengono i seguenti grafici



Il valore $\overline{y}$ è il valore $y(0)$ relativo alla soluzione y che in $-\frac{1}{3}$ vale -4.

Tale valore si trova imponendo

$$y\left(-\frac{1}{3}\right) = -4$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{y} = \frac{9}{8}\ln\left(\frac{8}{3}\right) - \frac{81}{16}$$

$$\overline{y} \sim -3{,}9$$